

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**



ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ**

*учебно-методическое пособие
к специальному лабораторному практикуму*



**Махачкала
Издательство ДГУ
2016**

Издается по решению редакционно-издательского совета Дагестанского государственного университета.

В методические указания включены описания лабораторных работ по численному моделированию формирования и развития газового разряда и моделированию различных электрических и оптических процессов в газоразрядной плазме. Лабораторные работы нацелены на понимание и более глубокое освоение студентом сущности плазменных процессов. В каждой работе дается краткая теория рассматриваемого физического явления, приводится математическая модель этого явления, подробно анализируются методы численного решения и алгоритмы моделирования. В приложениях приведены компьютерные программы по некоторым работам.

Пособие предназначено для студентов физического факультета университета, обучающихся по профилям «физика плазмы» и «физическая электроника».

Составители: Ашурбеков Н.А., д. ф.-м. н., профессор,
Иминов К.О., д. ф.-м. н., профессор,
Лахина М.А., к. ф.-м. н., доцент.

Рецензенты: Муртазаев А.К., д. ф.-м. н., профессор,
член-кор. РАН,
Назаралиев М.А., д. ф.-м. н., профессор.

© ИЗДАТЕЛЬСТВО ДГУ, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1.	6
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ . 6	
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2.	13
МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПОЛОСТИ КАТОДА НАНОСЕКУНДНОГО РАЗРЯДА	13
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.	22
РАСЧЕТ ПОЛНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ И УСИЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ С ТОНКОЙ СТРУКТУРОЙ	22
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4.	37
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ ПУТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОНОВ.....	37
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5.	42
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ВЫСОКОВОЛЬТНОГО НАНОСЕКУНДНОГО РАЗРЯДА В РЕЖИМЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВВИ.....	42
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7.....	55
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОБЛАСТЕЙ УСИЛЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И НЕКОМПЕНСИРОВАННОГО ЗАРЯДА В ПЛАЗМЕ.....	55
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8.....	67
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИИ СРЕДНЕЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ЗАСЕЛЕННОСТЕЙ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМОВ В ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЕ.....	67
ПРИЛОЖЕНИЕ: КРАТКИЙ КУРС РАБОТЫ В MathCAD.....	76
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1П.....	76
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2П.....	79
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3П.....	82
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4П.....	85
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5П.....	88
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6П.....	94

ПРЕДИСЛОВИЕ

Плазма – это четвертая форма существования вещества, состоящая из электронов, ионов и нейтральных атомов, обычно при температуре более 10^4 К. Плазма во Вселенной и в разнообразных природных процессах и явлениях представлена весьма широко. Межгалактическая, межзвездная и межпланетная плазма, плазма звезд и звездных атмосфер, от Белых Карликов до Красных Гигантов, нейтронных звезд, пульсаров и черных дыр, плазма верхних слоев атмосферы планет и плазма радиационных поясов, газоразрядная плазма лабораторных устройств и «термоядерная» плазма современных термоядерных установок. Динамические процессы, которые непрерывно протекают в плазме, являются весьма сложными явлениями и уравнения, которые описывают эти процессы, как правило, не имеют аналитических решений. Следовательно, невозможно решить эти уравнения без помощи вычислительной техники, и, конечно, моделирование процессов, протекающих в плазме, немыслимо без компьютеров.

Современные исследования плазмы включают в себя теорию, эксперимент и численное моделирование с помощью суперкомпьютеров, которые дают результаты, весьма полезные в теории и эксперименте, что позволяет экономить массу времени и средств, при создании дорогостоящих и сложных научных установок. Другая сторона использования компьютеров связана со значительным облегчением обработки результатов эксперимента, связанного с решением сложных уравнений, не имеющих решений в виде простых аналитических функций. Использование современных пакетов прикладных программ для компьютеров придает наглядность закономерностям, выражаемым, например, сложными формулами. Частично моделирование плазмы выполняется с использованием жидкостных моделей, а частично с использованием многочастичных моделей для получения детального кинетического поведения плазмы. Ряд гибридных методов сочетают оба описания.

Моделирование плазмы с помощью метода крупных частиц за последние 30 лет получило широкое распространение и сейчас используется во многих научных лабораториях мира. По мере улучшения параметров компьютеров затраты на моделирование снижались, и теперь моделирование с помощью метода крупных частиц используется не только в больших лабораториях, но и небольшими группами исследователей в университетах.

В предлагаемом пособии в виде лабораторных работ приведены восемь задач по численному моделированию процессов в плазме, включающих моделирование поведения системы заряженных частиц, распределения электромагнитного поля в плазме, формирования плазменных структур в разрядном промежутке, контуров спектральных линий излучения с тонкой структурой, релаксации средней энергии электронов и заселенностей возбужденных состояний атомов. И, наконец, одна работа посвящена

численному моделированию процесса формирования высоковольтного наносекундного разряда в режиме распространения высокоскоростных волн ионизации. Выполнение этих работ предполагает наличие у студентов соответствующих знаний по физике газового разряда, физике плазмы и определенных навыков программирования и работы на персональных компьютерах.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Цель работы: Целью лабораторной работы является изучение поведения системы заряженных частиц (плазмы) с использованием методов численного моделирования.

ТЕОРИЯ

Плазма, самое распространенное состояние вещества в природе, является наиболее наглядным примером системы состоящей из заряженных частиц. Сначала плазма интересовала исследователей как проводник электрического тока и как источник света. В настоящее время интерес к изучению плазмы связан с решением больших научно-технических проблем. Важнейшие из них это управляемый термоядерный синтез, магнитогидродинамическое преобразование тепловой энергии в электрическую, создание ускорительной техники, пучкового оружия, а так же мощных газоразрядных лазеров.

Теоретическое описание плазмы приводится в рамках классической физики, так как для обычной плазмы квантовые эффекты не играют заметной роли. Тем не менее, до сих пор программа теоретического анализа плазменных процессов выполнено лишь частично, и многие положения требуют экспериментального подтверждения. Для этого необходимо создание сложных и дорогостоящих экспериментальных установок. В этих условиях важное значение приобретает вычислительный эксперимент. К сожалению, многие практически интересные задачи не поддаются точному решению даже на современных ЭВМ, так как количество параметров, необходимых для описания таких систем, очень велико. Поэтому приходится исследовать различные модели, призванные описывать такие системы, а результаты, полученные для них, аппроксимировать на реальные системы.

Рассмотрим, каким образом можно исследовать системы заряженных частиц (плазма, ионные системы, растворы и т.д.) с помощью численного компьютерного моделирования. В качестве объекта исследования выберем плазму, поскольку она представляет собой ансамбль заряженных частиц, каждая из которых взаимодействует с остальными в соответствии с законом Кулона

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^N \frac{e_i e_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.1)$$

где \vec{F}_i – сила, действующая на i -ую частицу с зарядом e_i , расположенную в точке \vec{r}_i со стороны всех остальных $N-1$ частиц.

Однако, следует заметить, что несмотря на простоту закона Кулона, использовать его в качестве базового метода вычислительного эксперимента невозможно, так как количество заряженных частиц в моделях близких к реальным объектам составляет $N \sim 10^{15} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Исследовать такую систему на современных ЭВМ, исходя из первопринципов, каким является закон Кулона (1.1), не представляется возможным. Тем не менее, решение задач с помощью первопринципов настолько привлекательно, что поиски реализуемых на ЭВМ способов решения таких задач продолжаются. Один из реализуемых методов – «метод микрочастиц» допускает вычисление новых значений параметров одной из частиц некоторой группы, положив новые значения параметров остальных частиц группы такими же. Кроме того, существует ряд других методов и моделей, используемых при изучении таких систем.

В данной работе предлагается промоделировать систему заряженных частиц, исходя из основополагающего уравнения (1.1), подбирая необходимые параметры таким образом, чтобы было возможно прямое моделирование. Для этого поясним некоторые свойства и характеристики систем, состоящих из заряженных частиц (плазмы).

Фундаментальным свойством плазмы является ее *квазинейтральность*, проявляющаяся в том, что полный заряд любой области плазмы, характерный масштаб которой превышает некоторый критический размер (радиус Дебая), близок к нулю.

Заряженность частиц вместе с требованием квазинейтральности подразумевает наличие в плазме, по крайней мере, двух сортов частиц – отрицательно заряженных электронов и положительно заряженных протонов или ионов. В общем случае плазма может включать в себя многозарядные ионы и нейтральные атомы и молекулы. В плазме с малой плотностью и высокой температурой столкновения между частицами оказывают – слабое влияние на изменения поведения частиц плазмы. Такую плазму называют *бесстолкновительной*. В бесстолкновительной плазме определяющими являются эффекты, связанные с взаимодействием частиц с электромагнитными волнами и воли друг с другом. Такие взаимодействия оказывают влияние на большое количество частиц и называются *коллективными процессами*. Оказывается для описания коллективных процессов выгоднее с точки зрения численного решения соответствующих уравнений представить плазму как совокупность заряженных частиц и электрических и магнитных полей, которые взаимосвязаны. Такие поля и вызванные ими движения частиц называются *самосогласованными*. Так как скорости частиц значительно меньше скорости света, то, пренебрегая самосогласованным магнитным полем, можно описать поведение плазмы следующей системой уравнений

$$\vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^n + \vec{V}_i^{n+1} \Delta t \quad (1.2)$$

$$\vec{V}_i^{n+1} = \vec{V}_i^n + \frac{e_i}{m_i} \vec{E}(\vec{r}_i^n) \Delta t \quad (1.3)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^N e_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.4)$$

где \vec{r}_i^n и \vec{V}_i^n – радиус вектор и скорость i -ой частицы в момент времени $t_n = \Delta t$ ($n=0, 1, 2, \dots$); $\vec{E}(\vec{r}_i)$ – напряженность электрического поля, создаваемого в точке \vec{r}_i системой из $N-1$ заряженных частиц.

Для моделирования системы заряженных частиц рассмотрим ансамбль положительно и отрицательно заряженных частиц, находящихся в объеме V_0 в виде параллелепипеда с размерами сторон – a_0 , b_0 и c_0 . Пусть в этом объеме случайным образом распределены N частиц с зарядами $e^- = -1$ и $e^+ = 1$, массами $m^- = 1$ и

m^+ (масса положительно заряженных частиц дается в таблице в соответствии с вариантом) и со случайными начальными скоростями \vec{V}_{i0} из интервала $0 < \vec{V}_{i0} < 10$. Для задания координат и значений начальных скоростей частиц используются случайные числа ξ_i . Для того, чтобы система была квазинейтральной, будем считать, что $N^- = N/2$ и $N^+ = N/2$, т.е. количество положительно заряженных и отрицательно заряженных частиц одинаковым. При имитации движения частицы в соответствии с выражениями (1.2)-(1.4) в некоторый момент времени частица может выйти из рассматриваемого нами объема через одну из шести граней. Это может произойти в том случае, когда значения r_x , r_y или r_z станут превышать значения a_0 , b_0 или c_0 соответственно, или же окажутся отрицательными, если система координат расположена так, как показано на рисунке 1. В этом случае частицу, как правило, возвращают через противоположную грань с теми же значениями проекций скорости. При этом общее число частиц, суммарное значение энергии и импульса в системе сохраняются.

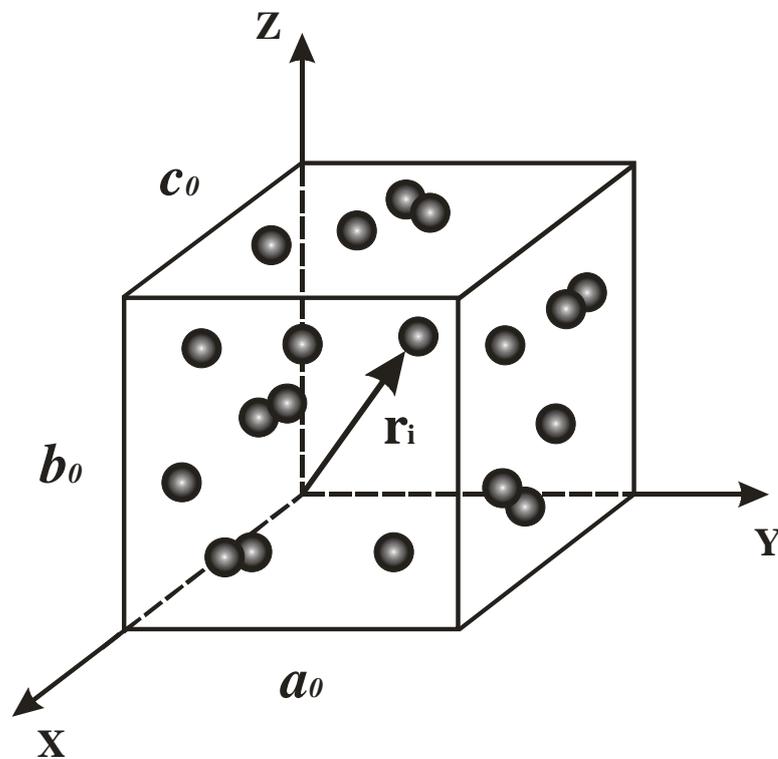


Рисунок 1. Геометрия моделирования системы заряженных частиц в виде ансамбля положительно и отрицательно заряженных частиц, находящихся в объеме в виде параллелепипеда со сторонами – a_0 , b_0 и c_0

Описанная выше процедура может быть легко реализована с помощью ЭВМ. При этом радиус-вектор \vec{r}_i равен

$$|\vec{r}_i| = \sqrt{r_{ix}^2 + r_{iy}^2 + r_{iz}^2}$$

где r_{ix} , r_{iy} и r_{iz} – проекции радиус-вектора \vec{r}_i на оси 0X, 0Y и 0Z соответственно.

Если в некоторый момент времени r_{ix} стало больше a_0 или $r_{ix} < 0$, то возврат частицы указанным способом реализуется при помощи операторов

IF (RX(I) > A0) THEN RX(I) := RX(I) – A0

IF (RX(I) < 0) THEN RX(I) := A0 - RX(I)

соответственно.

Из симметричности объема рассматриваемого объекта следует, что общее число входящих и выходящих частиц должно быть одинаковым.

Подобные условия, накладываемые на моделируемые системы, называются *периодическими граничными условиями* и очень часто помогают уменьшить влияние эффектов, связанных с конечностью изучаемого объекта или с наличием границ системы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В отчет включить краткое описание задания.
2. Составить программу на языке TP или в MathCAD, моделирующую систему заряженных частиц на основе уравнений (1.2) - (1.4), используя данные соответствующего варианта.
3. Вывести на печать начальные значения \vec{r}_{i0} и \vec{V}_{i0} в проекциях в удобном формате.

4. Для контроля за ходом изменения параметров частиц выводить на печать текущие значения \vec{r}_i и \vec{V}_i в проекциях в удобном формате.
5. Вывести на печать окончательные значения параметров \vec{r}_i и \vec{V}_i в проекциях.
6. Обдумать полученные результаты, сделать выводы и подготовить работу к защите.

При выполнении этой работы надо иметь в виду, что значение всех физических величин и параметров даются в относительных единицах.

ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАДАНИЯ

N	m ⁺	Δt	n	a ₀	b ₀	c ₀	варианты				
20	1500	0.01	1000	6	6	6	1	6	11	16	21
18	1600	0.02	1200	5	5	5	2	7	12	17	22
16	1700	0.025	1300	4	5	5	3	8	13	18	23
14	1800	0.04	1400	5	5	4	4	9	14	19	24
12	1900	0.02	1500	5	4	5	5	10	15	20	25

ЛИТЕРАТУРА

1. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. – М., 1982.
2. Смирнов Б.М. Ионы и возбужденные атомы в плазме. – М., 1979.
3. Райзер Ю.П. Основы физики газоразрядных процессов. М.: Наука, 1980.
4. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. М: Атомиздат, 1968. – 286 с.
5. Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы. М: Атомиздат, 1977. – 384 с.

6. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
7. Гульд Х., Табочник Я. Компьютерное моделирование в физике. – М.: Мир. 1990. Т.1.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПОЛОСТИ КАТОДА НАНОСЕКУНДНОГО РАЗРЯДА

Целью работы является численное исследование пространственного распределения электрического потенциала в полой катоде, определение эквипотенциальных линий внутри катода при различных его геометрических размерах. При оценке работы учитывается как знание студентом физики рассматриваемого явления, так и умение обращаться с компьютером.

ТЕОРИЯ

Полым катодом называется катод, рабочая поверхность которого имеет отрицательную кривизну или состоит из отдельных поверхностей (включая и плоские), ограничивающих часть пространства газоразрядного прибора и создающих полость. В качестве полых катодов часто используются трубки круглого или прямоугольного сечения, а также две плоские параллельные друг другу пластины любой формы, имеющие электрическое соединение. Пространство, ограниченное внутренними поверхностями таких катодов, строго говоря, нельзя назвать полостью, однако эти и подобные им конфигурации мы также будем относить к полым катодам, считая, что полость в этом случае образуется как бы частичная.

Разряд с полым катодом имеет ряд существенных отличий от разряда с плоскими электродами. Напряжение пробоя для промежутка с полым катодом оказывается выше, чем для промежутка с плоскопараллельными электродами. Основной причиной этого является криволинейность силовых линий электрического поля в момент пробоя, вследствие чего движения электронов и ионов в разрядном промежутке отличаются друг от друга не только направлением, но и формой траекторий. Электроны с большой энергией, обладая малым эффективным сечением для

соударений, двигаются между электродами как в вакууме, их траектории не совпадают с силовыми линиями поля. Ионы же, обладая большим сечением перезарядки, испытывают на своем пути много соударений, вследствие чего их траектории совпадают с силовыми линиями поля. Таким образом, ион, образованный каким-либо электроном, возвращается к катоду по другой траектории и попадает на катод в другом месте, отличающемся от места выхода из катода образовавшегося электрона. Это затрудняет выполнение условий пробоя и приводит к увеличению напряжения по сравнению с напряжением пробоя для плоскопараллельного промежутка.

Эффект полого катода. Приближение границы плазмы к открытому концу полого катода (см. рисунок 2) приводит к искривлению в этом месте пространства эквипотенциальных поверхностей, граница плазмы приобретает воронкообразный характер, и вершина плазменной воронки проникает внутрь полости.

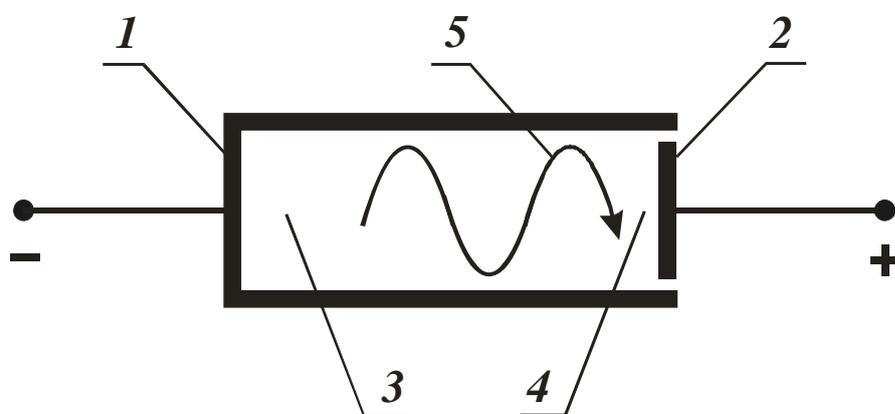


Рисунок 2. Схематический рисунок, поясняющий разряд с полым катодом: 1 – катод, 2 – анод, 3 – темное катодное пространство, 4 – плазма, 5 – траектория электронов

При этом электроны, ускоренные на каком-либо участке катодного падения, входят в этот тонкий конический плазменный стержень с большими скоростями, проходят его насквозь, попадают в противоположный участок катодного падения, тормозятся

встречным полем, останавливаются, начинают движение в противоположном направлении, снова попадают в плазму, проходят ее и т. д.

Два эффекта могут быть важны при этом. Тормозясь во встречном поле, электроны формируют заметный отрицательный объемный заряд, который компенсирует положительный объемный заряд пространства катодного падения и способствует приближению границы плазмы к поверхности катода. Кроме того, уменьшая свою энергию при торможении во встречном поле, электроны более эффективно ионизируют газ и увеличивают плотность плазмы. В результате действия этих факторов плазма прорывается внутрь катода, ток резко растет, напряжение на разрядном промежутке падает. Возникает эффект полого катода, обусловленный осцилляцией внутри полости значительного количества быстрых электронов.

Теория тлеющего разряда в полом катоде. Обычно теория рассматривает одномерную задачу для плоского катода бесконечно большой протяженности. В этом случае для решения задачи необходима система из трех групп уравнений.

1. Уравнения Пуассона

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi e_0(N_i - N_e) \approx -4\pi e_0 N_i.$$

Здесь электронами N_e можно пренебречь вследствие их высокой скорости.

2. Уравнения непрерывности, которые выражают тот факт, что скорости возникновения и исчезновения ионов и электронов должны быть равны для любого элементарного объема. Предположим, что Z является скоростью ионизации в 1 см^3 за 1 с в некоторой точке x , где поле равно E . Тогда уравнение непрерывности для электронов имеет вид:

$$Z = f(E) = \frac{d}{dx} \left(N_e v_e + D_e \frac{dN_e}{dx} \right)$$

Для ионов уравнение аналогично, но, поскольку диффузией ионов обычно пренебрегают, его записывают как

$$Z = f(E) = \frac{d}{dx}(N_i v_i)$$

где $f(E)$ – функция ионизации, которая должна быть известна.

3. Уравнения подвижности:

- для ионов $v_i = b_i E$;
- для электронов $v_e = b_e E$.

Приведенные три группы уравнений в принципе позволяют определить E , N_i и N_e как функции x . Если катодные части при решении этой системы уравнений разбиваются на два участка: пространство катодного падения и отрицательное свечение и рассматриваются только процессы в пространстве катодного падения, то граничное условие $E = 0$ для $x = d_k$ вводит в уравнение длину катодного пространства d_k . Поскольку N_i и v_i определяются из вышеприведенных уравнений, далее можно вычислить j_{ik} как $j_{ik} = e_0 N_i v_i$ при $x = 0$. При этом катодное падение вычисляется как $U_k = \int E dx$.

Распределение электрического потенциала в полости катода.

Рассчитаем распределение потенциала электрического поля в полости щелевого катода и определим влияние пространственного заряда на распределение электрического потенциала в полости катода.

В качестве исходного уравнения возьмем уравнение Лапласа для двумерного случая, поскольку вдоль катода (координаты z) условия не меняются:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = e [n_e(x, y) - n_i(x, y)] \quad (2.1)$$

где e – заряд электрона, $n_e(x, y)$ и $n_i(x, y)$ – плотности электронов и ионов соответственно. Для уравнения (2.1) предполагается, что ось Ox направлена вдоль глубины, а ось Oy вдоль ширины щели. Распределение зарядов $n_e(x, y)$ и $n_i(x, y)$ в полости катода выбирались из следующих соображений. Пусть ионы создаются в основном в объеме плазмы посредством ионизации и попадают из него в катодный слой, имея направленную скорость v_0 . Такое движение ионов должно компенсировать их потери из-за рекомбинации на

стенке. Для простоты проанализируем задачу о стационарном слое без учета столкновений в катодном слое.

Тогда из закона сохранения энергии мы имеем:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 - e\varphi(x, y)$$

$$v = \left(v_0^2 - \frac{2e\varphi(x, y)}{M} \right)^{1/2}$$

где M – масса ионов; $\varphi(x, y)$ – распределение потенциала внутри полости катода в двумерном случае; $v(x, y)$ – скорость ионов. Из уравнения непрерывности для ионов плотность ионов можно выразить через плотность фоновой (квазистационарной) плазмы n_0 :

$$n_0 v_0 = n_i(x, y)v(x, y),$$

отсюда

$$n_i(x, y) = n_0 \left(1 - \frac{2e\varphi(x, y)}{Mv_0^2} \right)^{-1/2}.$$

Плотность же электронов в стационарном случае будет подчиняться распределению Больцмана:

$$n_e(x, y) = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi(x, y)}{kT_e}\right),$$

где kT_e – средняя энергия электронов.

Таким образом, уравнение (1) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 4\pi e n_0 \left[\exp\left(\frac{e\varphi(x, z)}{kT_e}\right) - \left(1 - \frac{2e\varphi(x, y)}{Mv_0^2} \right)^{-1/2} \right] \quad (2.2)$$

Полученное неоднородное нелинейное уравнение (2.2) необходимо решить численно с использованием метода сеток для дифференциальных уравнений в частных производных в прямоугольной области $\Pi = (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ (рисунок 3) при следующих граничных условиях

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = \varphi_0 \\ \varphi(a, y) = \varphi(x, b) = \varphi(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

где a – глубина щели, b – ее ширина, φ_0 – начальный потенциал, подаваемый на анод.



Рисунок 3. Область распределения потенциала электрического поля

Выберем прямоугольную сетку (x_m, y_n) где

$$x_m = mh ; m = 0, 1, \dots, M ; h = a/M$$

$$y_n = nl ; n = 0, 1, \dots, N ; l = b/N$$

Для построения разностной схемы возьмем пятиконечный шаблон, рисунок 4.

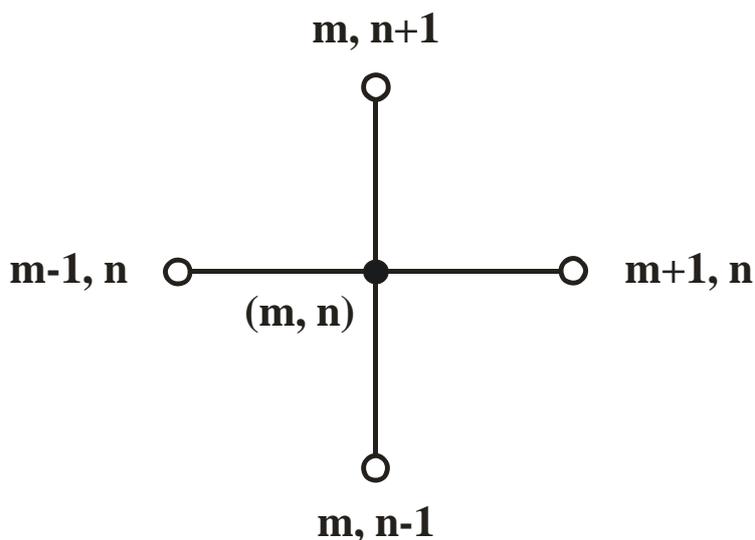


Рисунок 4. Шаблоны для построения разностной схемы метода сеток.

Пользуясь разложением узлов в этом шаблоне, разобьем область Π на две части: к одной части будем относить узлы, называемые

внутренними, а к другой – граничными. Пусть (x_m, y_n) – внутренний узел. Запишем уравнение (2.2) в этом узле:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{(x_m, y_n)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{(x_m, y_n)} = 4\pi e n_0 \left[\exp\left(\frac{e\varphi(x_m, y_n)}{kT_e}\right) - \left(1 + \frac{2e\varphi(x_m, y_n)}{Mv_0^2}\right)^{-1/2} \right] \quad (2.4)$$

Используя, разностные операторы уравнение (2.4) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\varphi(x_{m+1}, y_n) - 2\varphi(x_m, y_n) + \varphi(x_{m-1}, y_n)}{h^2} + \frac{\varphi(x_m, y_{n+1}) - 2\varphi(x_m, y_n) + \varphi(x_m, y_{n-1})}{l^2} \approx 4\pi e n_0 \left[\exp\left(\frac{e\varphi(x_m, y_n)}{kT_e}\right) - \left(1 + \frac{2e\varphi(x_m, y_n)}{Mv_0^2}\right)^{-1/2} \right]$$

В соответствии с полученным приближенным равенством составим разностную схему

$$L_h(\varphi^{(h)}) = f^{(h)}. \quad (2.5)$$

$$L_h(\varphi^{(h)}) = \begin{cases} \frac{\varphi(x_{m+1}, y_n) - 2\varphi(x_m, y_n) + \varphi(x_{m-1}, y_n)}{h^2} + \frac{\varphi(x_m, y_{n+1}) - 2\varphi(x_m, y_n) + \varphi(x_m, y_{n-1})}{l^2}, \\ m = 1, \dots, M-1; n = 1, \dots, N-1. \\ \varphi_{m,0}; m = 0, \dots, M; n = 0. \\ \varphi_{m,N}; m = 0, \dots, M; n = N. \\ \varphi_{0,n}; n = 0, \dots, N; m = 0. \\ \varphi_{M,n}; n = 0, \dots, N; m = M. \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} 4\pi e n_0 \left[\exp\left(\frac{e\varphi_{m,n}}{kT_e}\right) - \left(1 + \frac{2e\varphi_{m,n}}{Mv_0^2}\right)^{-1/2} \right], m = 1, \dots, M-1; n = 1, \dots, N-1. \\ 0, m = 0, M; n = 0. \\ 0, m = 0, M; n = N. \\ \varphi_0, n = 0, N; m = 0. \\ 0, n = 0, N; m = M. \end{cases}$$

Разностная схема (2.5) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений, где количество

неизвестных $(M - 1)(N - 1)$ равна количеству уравнений. В таком случае из (2.5) следует

$$f_{m,n} = \frac{\varphi(x_{m+1}, y_n) - 2\varphi(x_m, y_n) + \varphi(x_{m-1}, y_n)}{h^2} + \frac{\varphi(x_m, y_{n+1}) - 2\varphi(x_m, y_n) + \varphi(x_m, y_{n-1})}{l^2},$$

где $m = 1, \dots, M - 1; n = 1, \dots, N - 1$.

Отсюда при условии, что $h = l$ получим:

$$\varphi_{m,n} = \frac{1}{4}(\varphi_{m+1,n} + \varphi_{m-1,n} + \varphi_{m,n+1} + \varphi_{m,n-1}) - \frac{h^2}{4} f_{m,n}. \quad (2.6)$$

Полученную нелинейную разностную схему необходимо решить методом простой итерации. Для этого, в качестве начального приближения воспользуемся функцией:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0, & x = 0 \\ (x - a)(y - b)y, & x \neq 0 \end{cases}$$

Тогда из (2.6) получим

$$\varphi_{m,n}^{k+1} = \frac{1}{4}(\varphi_{m+1,n}^k + \varphi_{m-1,n}^k + \varphi_{m,n+1}^k + \varphi_{m,n-1}^k) - \frac{h^2}{4} f_{m,n}, \quad (2.7)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots; m = 1, \dots, M - 1; n = 1, \dots, N - 1$.

Окончательно полученную разностную схему (6) необходимо решить с помощью следующего алгоритма:

1. $k := 0$;
2. Вычисляем $\varphi_{m,n}^{k+1}$;
3. Если $|\varphi_{m,n}^{k+1} - \varphi_{m,n}^k| \leq \delta$, то $\varphi_{m,n}^k := \varphi_{m,n}^{k+1}$, иначе $k := k + 1$ и перейти к пункту 2, где δ – заданная точность вычислений.

Полученное уравнение (2.7) необходимо решить численно с использованием метода сеток для дифференциальных уравнений в частных производных в программной среде MathCAD.

УПРАЖНЕНИЕ

В работе предлагается численно исследовать двумерное распределение электрического потенциала в полости катода в зависимости от ширины и глубины полости катода.

1. Численно рассчитать распределение потенциала при следующих соотношениях ширины и глубины щели: 1:6, 2:6, 3:6, 4:6 при значениях $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 10^4 \text{ К}$, $\varphi_0 = 3 \text{ ед. CGSE}$. Определить зависимость глубины проникновения потенциала в полость катода от отношения a/b .
2. Рассчитать характерный вид распределение потенциала в полости катода при $a/b = 1/3$ и при следующих значениях параметров:
 - $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 10^4 \text{ К}$, $\varphi_0 = 3 \text{ ед. CGSE}$;
 - $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 10^4 \text{ К}$, $\varphi_0 = 3 \text{ ед. CGSE}$;
 - $n_e = 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 10^4 \text{ К}$, $\varphi_0 = 3 \text{ ед. CGSE}$.
 Определить значения n_e и T_e при которых происходит формирование катодного слоя в полости катода.
3. Пользуясь пакетами PLOTGRAF или STATISTICA, построить на основе рассчитанных результатов двумерные распределения потенциала и эквипотенциальные поверхности. Определить зависимости потенциала на оси полости от отношения ширины щели к ее глубине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москалев Б.И. Разряд с полым катодом. М.: Энергия, 1969. – 184 с.
2. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1992. – 536 с.
3. Чен Ф. Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987. – 398 с.
4. Ашурбеков Н.А., Иминов К.О. Наносекундные электрические разряды с полым катодом. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2012 – 164с.
5. Кудрявцев А.А., Смирнов А.С., Цендин Л.Д. Физика тлеющего разряда. СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 512 с.
6. Сигов Ю.С. Численные методы кинетической теории плазмы. М.: МИФИ, 1984.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
8. Пирумов У.Г. Численные методы. М.: Дрофа, 2003.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.

РАСЧЕТ ПОЛНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ И УСИЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ С ТОНКОЙ СТРУКТУРОЙ

Цель работы: Исследование механизмов поглощения оптического излучения.

Задачи, решаемые в работе:

- Расчет зависимости полного поглощения от оптической толщины без магнитного поля с учетом тонкой структуры;
- Расчет зависимости полного поглощения от оптической толщины в магнитном поле с учетом тонкой структуры и эффекта Зеемана;
- Расчет зависимости полного поглощения от оптической толщины в магнитном поле с учетом тонкой структуры и эффекта Зеемана на фоне сплошного спектра.

ТЕОРИЯ

В последние годы значительно возрос интерес к получению и исследованию плазменно-пучковых разрядов (ППР) в связи с успешным применением ППР для получения сильноточных электронных и ионных пучков в различных инжекторах и для накачки активных сред лазеров. В разряде, в коротких межэлектродных промежутках, при прикладывании импульсов напряжения с наносекундными фронтами в инертных газах возможно получение электронных пучков с энергией до сотни кэВ при давлениях вплоть до атмосферного. Наложение магнитного поля на такие разряды приводит к росту плотности тока разряда и изменению концентрации возбужденных атомов. В связи с этим для более полного понимания физики процессов протекающих в неравновесной и нестационарной плазме таких разрядов в магнитном поле необходимы исследования этих разрядов. Обширную информацию о кинетике формирования разряда можно получить, исследуя его оптическое излучение и спектральные характеристики.

Рассмотрим два излучающих объекта, находящихся на одной оптической оси. При этом излучение от источника 1 проходит через объем 2 (рисунок 5), содержащий атомы, поглощающие излучение. Тогда величина полного поглощения определяется как –

$$A = 1 - \frac{\text{поток прошедшего излучения}}{\text{поток падающего излучения}}$$

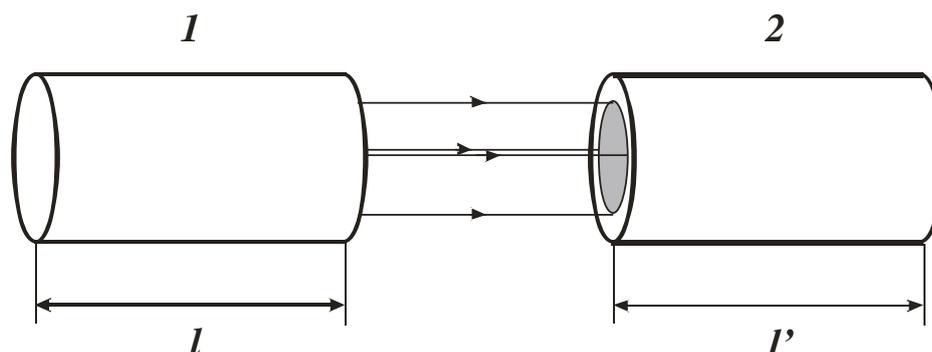


Рисунок 5. 1 – излучающий сосуд, 2 – поглощающий сосуд

Поток излучения в единичном интервале частот, выходящий из источника 1 в заданном направлении, с точностью до постоянной равен

$$\Phi_0(\nu) = C[1 - \exp(-\chi(\nu)l)] \quad (3.1)$$

Если излучающий слой 1 и поглощающий слой 2 идентичны во всех отношениях, т.е. имеют одинаковую температуру, давление, одинаковое распределение по энергетическим уровням и одинаковую толщину, то для малых значений ($\chi l \leq 4$), когда краями линии поглощения можно пренебречь и ее контур рассматривать как чисто доплеровский, выражение (3.1) для полного поглощения

принимает вид $A_\nu = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\Phi_0(\nu) - \Phi_e(\nu)}{\Phi_0(\nu)} d\nu$.

Полагая световой поток $\Phi_0(\nu)$ постоянным в пределах ширины и, используя соотношение $\Phi_e(\nu)d\nu = \Phi_0(\nu)e^{-\chi(\nu)l}d\nu$, получим

$$A_\nu = \int_{\nu_1}^{\nu_2} (1 - e^{-\chi(\nu)l}) d\nu, \quad (3.2)$$

где $\chi(\nu) = \chi_0 \exp(-\frac{4 \ln 2}{\Delta \nu_D^2} [\nu - \nu_0]^2)$, $\Delta \nu_D$ – доплеровская ширина линии,

(см. рисунок 6) т.е. ширина линии при ординате $\chi(\nu) = \frac{\chi}{2}$ равна

$$\Delta \nu_D = 2 \sqrt{\frac{2 \ln 2 R T}{\mu} \frac{\nu_0}{c}}, \quad (3.3)$$

где c – скорость света, μ – атомный вес, R – газовая постоянная, T – абсолютная температура.

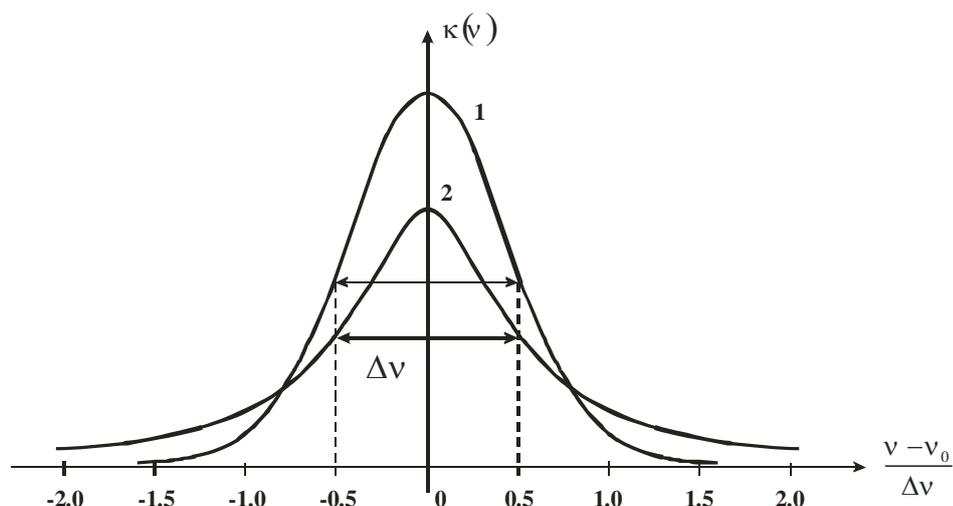


Рисунок 6. Контуры спектральных линий. 1 – доплеровский, 2 – лоренцовский при одинаковой интегральной яркости линии $\chi(\nu)$ и одинаковой ширине $\Delta \nu_D = \Delta \nu_L = \Delta \nu$

Следовательно, измерив величину полного поглощения A из (3.2) можно найти значение величины $\chi_\nu l$ т.е. определить коэффициент поглощения излучения χ на частоте ν .

Оценим влияние тонкой структуры линии HeI ($2^3P_{210} - 3^3D_{321}$) $\lambda = 5875 \text{ \AA}$ на величину поглощения A путем численного расчета интенсивности компонент. Схема рассматриваемых переходов имеет следующий вид (рисунок 7):

- уровни 3^3D_{321} терма 3^3D практически совпадают (расщепление этого уровня составляет сотые доли процента от расщепления уровня 2^3P);

- терм 2^3P обращенный;
- по правилу интенсивностей яркости этих компонент, относятся как $1:3:5$ соответственно статистическим весам уровней $2^3P_0, 2^3P_1, 2^3P_2$.

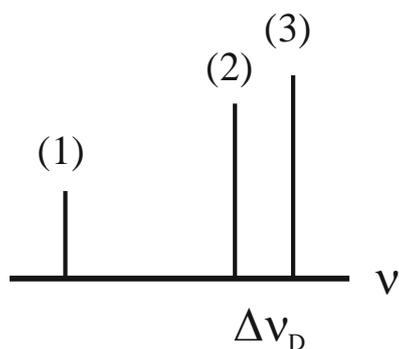
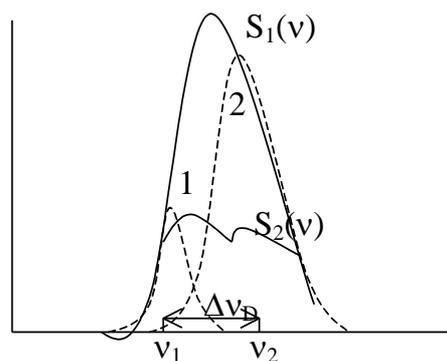
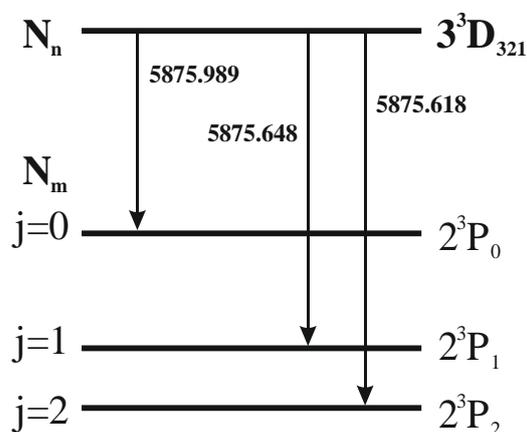


Рисунок 7. Схема возникновения компонент тонкой структуры для перехода $HeI\ 2^3P_{210} - 3^3D_{321}$

Рисунок 8. Реабсорбированные контуры двух компонент линии гелия HeI :

1. - $\lambda = 5875.648\ \text{\AA}$;

2. - $\lambda = 5875.618\ \text{\AA}$;

$S_1(\nu)$ - суммарный контур линий;

$S_2(\nu)$ - контур, возникающий при повторном поглощении.

Те же отношения сохраняются для коэффициентов поглощения в центре линии отдельных компонент (рисунок 8). При этом связь между коэффициентом поглощения χ_0 и коэффициентом излучения I_0 зависит от относительной заселенности уровней N_n/N_m . Если оба уровня m и n имеют тонкую структуру, для отдельной компоненты $i \rightarrow j$ согласно [1] можно записать:

$$\chi(0)_{ji} = \frac{c^3}{2h\nu_{ij}^3} - \frac{g_i N_j}{g_j N_i} I(0)_{ij} \quad (3.4)$$

Известно, что для близко расположенных подуровней легче возникает равновесное распределение, чем для далеко отстоящих. Тогда возможен случай, когда при отсутствии общего равновесия в плазме каждая из групп подуровней заселена равновесно. Так как частоты компонент близки друг к другу, справедливо

$$N_j = \frac{g_i}{g_n} N_m \text{ и } N_i = \frac{g_i}{g_n} N_n$$

и формула (3.4) принимает вид

$$\chi(0)_{ji} = \frac{c^2}{2h\nu_{ij}^3} \frac{g_n}{g_m} \frac{N_m}{N_n} I(0)_{ij}$$

Если в выражении величина N_m/N_n постоянна, то коэффициенты поглощения компонент сложной линии пропорциональны их яркостям. Такое частичное выполнение закона Больцмана позволяет вести обработку результатов измерений, проведенных для линий, имеющих тонкую структуру, если для всей группы компонент сложной линии отношение N_m/N_n сохраняется постоянным в условиях эксперимента.

Пренебрегая расщеплением верхнего уровня для суммарной вероятности перехода A_{nm} и вероятностей перехода отдельных компонент, можно записать

$$A_{nj} = A_{nm} \frac{a_j}{\sum_j a_j},$$

где $A_{n1} : A_{n2} : A_{n3} = a1 : a2 : a3 = 1 : 3 : 5$, так как если выполнено правило интенсивностей, то $a_j = g_j$, где g_j – статистические веса подуровней, на которые расщеплен уровень m . Заметим, что по определению две компоненты $\lambda_2 = 5875.648 \text{ \AA}$ и $\lambda_3 = 5875.618 \text{ \AA}$ следует считать частично перекрывающимися, поскольку расстояние между подуровнями, $\nu_2 - \nu_3 = \Delta^3 P_{23} = 0.26 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$, сравнимо по величине с доплеровской полушириной отдельных компонент $\Delta\nu_D = 0.365 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$ [1]. Самую слабую компоненту, соответствующую переходу $2^3 P_o - 3^3 D_1$, следует считать полностью

разделенной с двумя другими (частично перекрывающимися), так как $\Delta^3 P_{0l} = 2.96 \times 10^{10} \text{ с}^{-1} \gg \Delta \nu_D$.

Если используемая аппаратура не обладает достаточной разрешающей силой и компоненты при измерении сливаются, полная мощность излучения всех компонент I_{nm} равна сумме мощностей отдельных компонент I_{nj} . Однако теперь совокупность компонент не может рассматриваться как одна линия с некоторым определенным значением коэффициента поглощения в центре линии, так как поглощение совокупности линий с разными частотами не подчиняется простому экспоненциальному закону.

В случае применения метода трубки с одним зеркалом I - интенсивность потока от трубки l с учетом реабсорбции и потерь на переднем окошке, rI - интенсивность от ее изображения, r - коэффициент отражения от зеркала.

Пусть известны соотношения первичных интенсивностей компонент ($I_{01} : I_{02} : I_{03} = a1 : a2 : a3$) и коэффициентов поглощения в центре линии ($\chi_{01} : \chi_{02} : \chi_{03} = b1 : b2 : b3$, т.е. $I_{0j} = Ca_j$; $\chi_{0j} = C'b_j$, где C и C' – постоянные в условиях опыта. Тогда функция распределения для j -ой компоненты, первоначальный доплеровский контур которой искажен за счет реабсорбции внутри трубки, согласно [1] имеет вид:

$$I_j(\nu) = r \frac{C}{C'} \frac{a_{0j}}{b_{0j}} \left(1 - \exp \left\{ -C'b_{0j}l \exp \left[-\beta c^2 \left(\frac{\nu - \nu_{0j}}{\nu_{0j}} \right)^2 \right] \right\} \right), \quad (3.5)$$

где $\beta = \frac{\mu}{2RT}$, c – скорость света. Тогда распределение интенсивности для суммарного излучения всех компонент будет иметь вид:

$$I'(\nu) = r \frac{C}{C'} \sum_j \frac{a_{0j}}{b_{0j}} \left(1 - \exp \left\{ -C'b_{0j}l \exp \left[-\beta c^2 \left(\frac{\nu - \nu_{0j}}{\nu_{0j}} \right)^2 \right] \right\} \right) \quad (3.6)$$

Интегральная интенсивность равна площади, лежащей между кривой $I'(\nu)$ и осью абсцисс (рисунок 8). При прохождении излучения вторично через трубку часть светового потока поглотится, и коэффициент поглощения для каждой частоты ν

должен быть равен сумме коэффициентов поглощения отдельных компонент, взятых для той же частоты ν : $\chi_\nu = \sum_j \chi_j(\nu)$.

Таким образом, зависимость суммарной интенсивности от частоты для излучения, прошедшего через трубку, при измерении с открытым зеркалом имеет вид

$$I''(\nu) = I'(\nu) \exp \left[- \sum_j \chi_j(\nu) l \right] \quad (3.7)$$

Рассчитаем численно интегральную интенсивность всех трех компонент, искаженных за счет реабсорбции при однократном прохождении пути для различных значений $\chi_0 l$. Она будет пропорциональна суммарной площади S' , заключенной между осью абсцисс и результирующими контурами всех компонент тонкой структуры. Тогда, если для тех же значений $\chi_0 l$ интегральная интенсивность, полученная при повторном прохождении через источник, $\sim S''$ (рисунок 8), величину относительного поглощения, согласно (3.2), определим как

$$A = \frac{S' - S''}{S''} = \frac{I'(\nu) - I''(\nu)}{I''(\nu)} \quad (3.8)$$

ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА

Особое значение приобретают результаты таких исследований в условиях анизотропии плазмы, обусловленной внешним магнитным полем. Внешние магнитные поля по-разному влияют на оптические характеристики разряда. С одной стороны, во внешнем магнитном поле меняются электрокинетические характеристики разряда, с другой – меняются контура спектральных линий из-за эффекта Зеемана.

Расщепление уровней энергии и спектральных линий во внешнем магнитном поле получило название эффекта Зеемана.

В простейшем случае эффект Зеемана заключается в том, что при помещении источника света в магнитное поле спектральная линия расщепляется на два или три компонента. Такой тип расщепления, который наблюдается на системе синглетных (одинокных) спектральных линий, называется нормальным или

простым эффектом Зеемана. Этот эффект был объяснен Лоренцем на основе классической электронной теории как результат расщепления частоты колебания в атоме упруго связанного электрона и лишь впоследствии, на основе квантовых представлений, был истолкован естественным образом как результат расщепления уровней энергии.

Для многих спектральных линий расщепление в магнитном поле имеет более сложный характер. Эффект Зеемана, выражающийся в многократном расщеплении спектральных линий, носит название аномального или сложного.

Наличие у атома магнитных моментов и явление пространственного квантования также подтверждаются эффектом Зеемана. Взаимодействие магнитного момента атома с внешним магнитным полем приводит к тому, что атом с энергией E_0 приобретает добавочную энергию ΔE_H . Эта добавочная энергия приводит к расщеплению уровней и, следовательно, к расщеплению спектральных линий на несколько компонентов.

Сложный эффект Зеемана возникает в слабых магнитных полях. Внешнее магнитное поле считается слабым, когда возникающее в его присутствии расщепление уровней мало по сравнению с расстоянием между уровнями тонкой структуры.

Атом с магнитным моментом $\vec{\mu}_J$ приобретает во внешнем магнитном поле добавочную энергию, зависящую от величины и взаимной ориентации \vec{H} и $\vec{\mu}_J$:

$$\Delta E_H = -\vec{\mu}_J \vec{H} = -\mu_{JH} H \quad (3.9)$$

Подставляя сюда выражение для проекции момента получим:

$$\Delta E_H = g m_J \mu_B H \quad (3.10)$$

Таким образом, если энергия атома в отсутствии внешнего поля равнялась E_0 , то при наложении магнитного поля с полным моментом $\vec{\mu}_J$ расщепляется на $(2j + 1)$ с различными значениями m_J и различной энергией, определяемой выражением:

$$E = E_0 + \Delta E_H = E_0 + g m_J \mu_B H \quad (3.11)$$

Расстояние между соседними подуровнями определяется из условия $\Delta m_J = 1$:

$$(\Delta E_H)_{J, J+1} = g \mu_B H \quad (3.12)$$

т.е. при постоянном поле подуровни каждого состояния находятся на равных энергетических расстояниях.

Предположим, что в отсутствии внешнего поля спектральная линия с частотой ν_0 возникает в результате перехода атома из состояния с энергией E_{02} в состояние с энергией E_{01} т.е.:

$$\nu_0 = \frac{E_{02} - E_{01}}{h} \quad (3.13)$$

Тогда согласно (3.3) при наличии внешнего магнитного поля будут наблюдаться линии с частотами $\nu_0 + \Delta\nu_H$, определяемые равенством:

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu_H = \frac{E_{02} - E_{H2}}{h} - \frac{E_{01} - E_{H1}}{h} \quad (3.14)$$

Сравнивая (3.13) и (3.14), находим величину смещения компонентов относительно первоначальной частоты:

$$\Delta\nu_H = \frac{\Delta E_{H2} - \Delta E_{H1}}{h} = \frac{\mu_B H}{h} (g_2 m_{J2} - g_1 m_{J1}) \quad (3.15)$$

Переходы между подуровнями подчиняются правилу отбора, в силу которого m_J может меняться на ± 1 или оставаться неизменным, т.е.:

$$\Delta m_J = m_{J2} - m_{J1} = 0, \dots \pm 1 \quad (3.16)$$

Как видно из (3.15), величина расщепления зависит от фактора Ланге уровней, между которыми происходит переход, т.е. от квантовых чисел L, S, J каждого уровня. Соотношение $\Delta\nu_0 = \mu_B H/h$ представляет собой величину нормального расщепления.

Рассмотрим расщепление в магнитном поле спектральной линии гелия $HeI (3^3D - 2^3P)$. Излучение с уровней гелия с $n = 2$ находится в ВУФ-области спектра, поэтому заселенности этих состояний исследовались методом полного поглощения. При внесении магнита исследуемая линия расщепляется на 54 компоненты ($18 - \pi$ и $36 - \sigma$) (рисунок 9). Причем в зависимости от величины магнитного поля можно наблюдать для разных линий частичное или полное перекрытие компонент, поэтому здесь приходится учитывать суммарный контур $\chi(\nu)$.

Величина расщепления определялась по формуле

$$\Delta\nu = (\mu_{J1} g_1 - \mu_{J2} g_2) \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{e}{m_0} \right) H \quad (3.17)$$

где μ_J – квантовое число, принимающее значение $J, J - 1 \dots -J$, всего $2J + 1$ различных значений. Фактор Ланге определялся по формуле

$$g = 1 + [J \cdot (J + 1) - L \cdot (L + 1) + S \cdot (S + 1)] / 2 \cdot J \cdot (J + 1) \quad (3.18)$$

Причем в зависимости от величины магнитного поля для разных линий наблюдается частичное или полное перекрывание компонент, поэтому здесь нами учитывался суммарный контур

$$\chi(\nu) = \chi_0 \sum_{i=1}^{54} C_i \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (\omega_i - y)^2} dy \quad (3.19)$$

где χ_0 – значение коэффициента поглощения в центре линии, а величины y , ω_i и a определялись из следующих соотношений

$$y = \frac{2\sqrt{\ln 2}(\nu_0 - \nu_i)}{\Delta\nu_D}, \quad \omega_i = \frac{2\sqrt{\ln 2}(\nu_i - \nu)}{\Delta\nu_D}, \quad a = \frac{\Delta\nu_L}{\Delta\nu_D} \sqrt{\ln 2}.$$

Здесь $\Delta\nu_D$ – доплеровская ширина линии, $\Delta\nu_L$ – общая ширина дисперсионного и естественного контуров линии.

По анализу получившихся при наличии магнитного поля компонент была составлена таблица начальных данных (таблица 2), в которой определены значения величин расщепления, факторов Ланге, абсолютных и относительных интенсивностей.

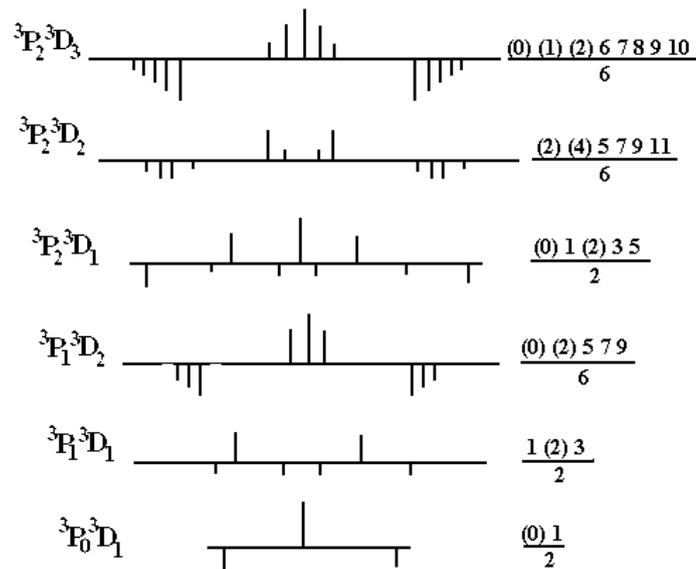


Рисунок 9. Расщепление триплетных уровней 2^3P и 3^3D в магнитном поле.

Для рассматриваемого случая полное поглощение для суммарного контура поглощения описывается следующим выражением.

$$A = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \exp(-\chi_0 l)]^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \exp(-\chi l)] d\omega} \quad (3.20)$$

МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Для проведения численного анализа необходимо составить программу в пакете MathCAD, в которой должна быть реализована структурная схема алгоритма вычисления значения определенного интеграла от функции одной переменной методом Симпсона.

Для приближённого вычисления интеграла функции $f(x)$ в методе Симпсона $\int_a^b y dx$ промежуток от $a(x_0)$ до $b(x_n)$ разбивается на n равных частей, и для точек деления $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ вычисляются значения интегрируемой функции y . Затем необходимо воспользоваться формулой приближённого интегрирования:

$$\int_a^b y dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad (3.21)$$

На всем отрезке $[a, b]$ формула Симпсона имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^N \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i) = \\ &= \frac{h}{6} \left[f_0 + f_N + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1}) + 4(f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{N-1/2}) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Чтобы не использовать дробных индексов, можно ввести следующие обозначения $x_i = a + 0.5hi$, $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, 2N$, $h_N = b - a$ и записать формулу Симпсона в следующем виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6N} [f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2N-1})] \quad (3.23)$$

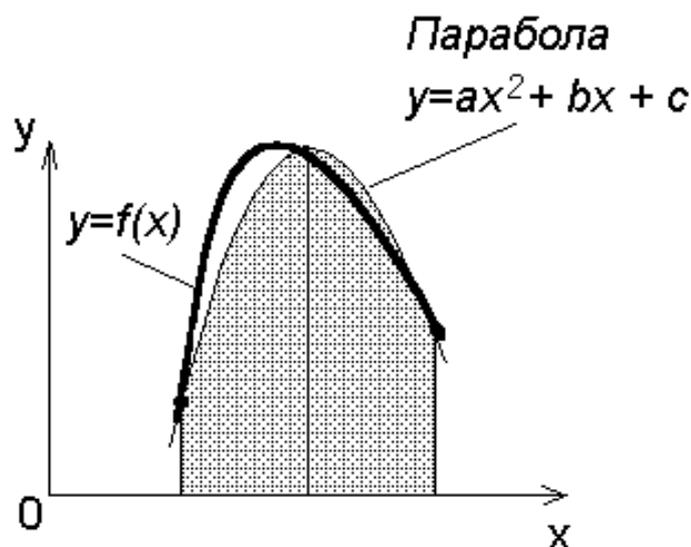


Рисунок 10. Геометрическое определение формулы Симсона

АЛГОРИТМ ПРОГРАММЫ

Алгоритм работы основной части программы представлен 10 следующими блоками:

Блок 1. Определить тестовую функцию $\xi(x)$.

Блок 2. Создание программы начинается с кнопки «AddLine». Появится вертикальная линия, которая играет роль операторных скобок. Приравнять выбранную функцию во вкладке программирование элементу программирования.

Блок 3. В открывшейся вкладке определить пределы интегрирования $[a, b]$ и число интервалов n , на которое разбивается отрезок $[a, b]$.

Блок 4. Ввести формулу для нахождения шага интегрирования h :

$$h = \frac{(b-a)}{n}.$$

Блок 5. Составить внешний цикл с параметром m , пробегающим значения от 1 до $n-1$. Для создания цикла типа «for», необходимо:

- Щелкнуть по кнопке «for» на панели программирования.
- Напечатать в поле ввода слева от знака \in имя переменной цикла.

Блок 6. Во внешнем цикле составить внутренний цикл для параметров y , ω_i и a :

$$y = \frac{2\sqrt{\ln 2}(v_0 - v_i)}{\Delta v_D}, \quad \omega_i = \frac{2\sqrt{\ln 2}(v_i - v)}{\Delta v_D}, \quad a = \frac{\Delta v_L}{\Delta v_D} \sqrt{\ln 2}.$$

Блок 7. Для расчета суммарного контура

$$\chi(v) = \chi_0 \sum_{i=1}^{54} C_i \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (\omega_i - y)^2} dy, \text{ составить интегральное выражение,}$$

в котором изменяющиеся параметры пробегают значения, как по внешнему, так и по внутреннему циклу по параметрам m и j .

Блок 8. Рассчитать полное поглощение для суммарного контура, для чего спрограммировать еще один цикл с параметром i , рассчитывающий

$$S_i = \frac{(1 - e^{-\sum_{m=1}^{n-1} A_{m,i}})^2}{(1 - e^{-\sum_{m=1}^{n-1} A_{m,i}})}$$

Блок 9. Для получения таблицы значений функции ввести: ξ . На экране появляется таблица значений искомой функции.

УПРАЖНЕНИЕ 1

Численно рассчитать зависимость полного поглощения A от оптической толщины поглощающего слоя $\chi_0 l$ спектральной линии HeI с длиной волны $\lambda = 5875 \text{ \AA}$ с учетом тонкой структуры. Для определения A необходимо рассчитать интегралы, стоящие в уравнении (3.8) с помощью формулы Симпсона. Для этого следует взять выражение для Доплеровского контура вида:

$$\chi_j(v) = \chi_{0j} l \cdot e^{-2.7762 \left(\frac{v-v_j}{\Delta v_{gj}}\right)^2}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

где $\chi_{01} l = \frac{1}{9} \chi_0 l$; $\chi_{02} l = \frac{3}{9} \chi_0 l$; $\chi_{03} l = \frac{5}{9} \chi_0 l$. Рекомендуются шаг разбиения интервала $\chi_0 l = H = 0.3$, $\chi_0 l = [-4; -3.7; -3.4; \dots - 0.1; +0.2; \dots + 9.4; +9.7; +10]$. При этом шаг интегрирования $h = 10^8$, а количество разбиений области интегрирования $- N = \left(\frac{v_2 - v_1}{h}\right) - 1$.

В расчетах использовать следующие значения частот компонент тонкой структуры и их доплеровские ширины:

$v_1=5.1055235 \times 10^{14}$	$\Delta v_{g1}=316.64245 \times 10^7$
$v_2=5.1058138 \times 10^{14}$	$\Delta v_{g2}=316.56082 \times 10^7$
$v_3=5.1058458 \times 10^{14}$	$\Delta v_{g3}=316.56243 \times 10^7$

УПРАЖНЕНИЕ 2

Произвести специальные расчеты зависимости полного поглощения A от оптической толщины $\chi_0 l$ в магнитном поле с учетом тонкой структуры и эффекта Зеемана для спектрального перехода $HeI (3^3D - 2^3P)$.

Для этого по таблице 1 определить подуровни, возникающие в результате эффекта Зеемана, с соответствующими им квантовыми числами, по которым рассчитывались величина расщепления, фактор Ланге, величины абсолютной и относительной интенсивности возникающих компонент линий при наблюдении как вдоль, так и поперек поля.

Таблица 1

Поперечное наблюдение			
переход	I_π	$I_\sigma(M \rightarrow M - 1)$	$I_\sigma(M \rightarrow M + 1)$
$\gamma J \rightarrow \dot{\gamma} J$	M^2	$1/4((J + M)(J + 1 - M))$	$1/4((J - M)(J + 1 + M))$
$\gamma J \rightarrow \dot{\gamma}(J - 1)$	$J^2 - M^2$	$1/4((J + M)(J - 1 + M))$	$1/4((J - M)(J - 1 - M))$
$\gamma J \rightarrow \dot{\gamma}(J + 1)$	$(J + 1)^2 - M^2$	$1/4((J + M)(J + 1 + M))$	$1/4((J - M)(J + 1 - M))$
Продольное наблюдение			
$\gamma J \rightarrow \dot{\gamma} J$	0	$1/2((J + M)(J + 1 - M))$	$1/2((J - M)(J + 1 + M))$
$\gamma J \rightarrow \dot{\gamma}(J - 1)$	0	$1/2((J + M)(J - 1 + M))$	$1/2((J - M)(J - 1 - M))$
$\gamma J \rightarrow \dot{\gamma}(J + 1)$	0	$1/2((J + M)(J - 1 + M))$	$1/2((J - M)(J + 1 - M))$

Выражение (3.20) с контуром поглощения вида (3.19) рассчитать численно при различных значениях напряженности магнитного поля и различных значениях постоянной Фойхтовского

контура (a) для спектрального перехода HeI ($3^3D_{123} - 2^3P_{012}$) методом Симпсона.

ЗАДАНИЯ К ОТЧЕТУ

1. Описание модели численного расчета для обоих уравнений представить в виде блок-схем с подробным описанием назначения каждого элемента блока.
2. Результаты расчетов представить в виде графиков зависимости поглощения A от оптической толщины $\chi_0 l$ с использованием элементов графики в MathCAD.
3. Ответы на контрольные вопросы приложить к отчету.
4. Контрольные вопросы
5. Соотношение между механическими и магнитными моментами атомов.
6. Сложение орбитального и спинового момента атома. Фактор Ланге.
7. Назовите правила квантования проекций магнитных моментов и правила отбора для соответствующих квантовых чисел.
8. Основы теории простого и сложного эффекта Зеемана.
9. Схема уровней атома, помещенного в магнитное поле.
10. Метод Симпсона. Чему равен алгебраический порядок точности формулы Симпсона

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И. В. Курс общей физики. Т.3. Оптика, атомная физика, физика ядра и элементарных частиц. М.: Наука, 1989.
2. Шпольский Э.В. Атомная Физика. Т.1. М.,1994.
3. Мулярчик С. Г. Численные методы. Мн., 2001.
4. Вержбицкий В. М. Численные методы. М., 2000.
5. Яньков В.И., Бобырь Г.А. Лабораторный практикум по MathCAD. Учебное пособие. М.: «Спутник», 2009г.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ ПУТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОНОВ

Цель работы: Освоение метода определения средней энергии электронов в наносекундных разрядах с помощью моделирования кинетических коэффициентов электронов

ТЕОРИЯ

В настоящее время существует множество методов определения средней энергии электронов в разряде. Среди них можно отметить известные зондовые и спектроскопические методы, основанные на измерении относительных интенсивностей спектральных линий и спектрального распределения в континууме. Однако все эти методы предполагают наличие в разряде локального или частичного термодинамического равновесия, чего нет в разрядах наносекундной длительности и активных средах лазеров.

Трудности связаны с наносекундным временным диапазоном существования разряда, в котором протекают основные процессы и разрядная плазма не успевает прийти в равновесное состояние. По этим причинам в этой работе предложен метод определения средней энергии электронов, сочетающий в себе экспериментальные измерения и численное моделирование на ЭВМ.

Суть метода заключается в следующем. В начальных стадиях наносекундного разряда происходит интенсивное заселение низколежащих возбужденных, в том числе и метастабильных состояний вследствие того, что скорость их возбуждения значительно превосходит скорость прямой ионизации. В последнем существенным становится ступенчатая ионизация с этих уровней. При этом во многих случаях справедлива модель «мгновенной ионизации», поэтому заселенности низколежащих возбужденных состояний ограничиваются ступенчатой ионизацией. В рамках этой

модели заселенности метастабильных уровней описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dN_m}{dt} = n_e N_0 \langle \sigma_{01} \nu \rangle - N_m n_e \langle \sigma_{1e} \nu \rangle, \quad (4.1)$$

где N_m , n_e , N_0 – плотности метастабильных атомов, электронов и атомов в основном состоянии соответственно, σ_{01} и σ_{1e} – сечения возбуждения метастабильных уровней и ступенчатой ионизации с них соответственно, ν – скорость электронов. Угловые скобки означают усреднение по функции распределения электронов $f(\nu)$:

$$\langle \sigma_{01} \nu \rangle = \int_0^{\infty} \sigma_{01} f(\nu) \nu d\nu = k_b \quad (4.2)$$

$$\langle \sigma_{1e} \nu \rangle = \int_0^{\infty} \sigma_{1e} f(\nu) \nu d\nu = k_u \quad (4.3)$$

Для низколежащих возбужденных состояний атомов, как правило, условие квазистационарности не выполняется, поэтому уравнение нужно решать в дифференциальной форме. Однако, как показывают экспериментальные исследования, в разряде плотность метастабильных атомов во времени проходит через максимум, определяемый равенством потоков возбуждения метастабильных уровней и их ступенчатой ионизации. Для этого момента времени (для максимального значения N_m) производная $N_m/dt = 0$ не зависимо от рассматриваемой модели, т.е.

$$n_e N_0 \langle \sigma_{01} \nu \rangle - N_m n_e \langle \sigma_{1e} \nu \rangle = 0 \quad (4.4)$$

Из уравнение (4.4) после сокращения в обеих частях, можно получить следующее соотношение:

$$\frac{N_m}{N_0} = \frac{\langle \sigma_{01} \nu \rangle}{\langle \sigma_{1e} \nu \rangle} = \frac{k_b}{k_u} \quad (4.5)$$

Сечение возбуждения σ_{01} и ионизации σ_{1e} являются функциями средней энергии электронов и также являются универсальными для данного рода газа. Вследствие этого правая часть уравнения (4.5) представляет собой функцию, зависящую от средней энергии электронов, физический смысл которой – относительная заселенность метастабильных уровней. Значение этой функции

$$\varphi(\nu) = \frac{\langle \sigma_{01} \nu \rangle}{\langle \sigma_{1e} \nu \rangle} = \frac{k_b}{k_u}$$

можно рассчитать на ЭВМ численно, используя известные из литературы значения сечений возбуждения и ступенчатой ионизации.

Если экспериментально измерить (например, методом реабсорбции) плотность метастабильных атомов N_m , то из соотношения

$$\frac{N_m}{N_0} = \varphi(\nu) \quad (4.6)$$

можно определить среднюю энергию электронов для данного момента времени.

Трудности практического использования (4.6) связаны в первую очередь со сведениями о виде функции распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ). В начальных стадиях наносекундных разрядов формируются высокоэнергетичные электроны, поэтому вид ФРЭЭ существенно отличается от максвелловской. При плотности электронов $n_e > 10^{13} \text{ см}^{-3}$ вследствие электрон-электронных соударений максвелловская ФРЭЭ может установиться по истечению времени $\tau \geq (n_e \langle \sigma_{ee} \nu \rangle)^{-1} \sim 10^{-7} \text{ с}$. Если максимум концентрации возбужденных атомов в разряде достигается через несколько сот наносекунд, то в первом приближении ФРЭЭ можно считать максвелловской. Для таких условий можно рассчитать отношения k_b/k_u численно на ЭВМ для инертных газов, результаты расчета привести в виде графиков и из этих графиков определить среднюю энергию электронов в разряде. В расчетах необходимо использовать экспериментально измеренные сечения возбуждения и ступенчатой ионизации для гелия, неона и аргона приведенные в описании.

Надо отметить, что описанная выше модель справедлива при отсутствии перемешивания максвелловскими электронами между уровнями и компонентами тонкой структуры возбужденных атомов. При сильном перемешивании нужно написать уравнения, подобные уравнению (4.1), для каждой компоненты тонкой структуры и путем их сложения определить универсальную функцию для блока уровней.

Константы возбуждения и ионизации для *He*, *Ne* и *Ar* необходимо определить с помощью численного интегрирования из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} k_b = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) q_b(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \\ k_u = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) q_u(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \end{cases} \quad (4.7)$$

где ε_1 и ε_2 – пределы интегрирования; $m = 9.1 \times 10^{-28}$ г – масса электрона; $f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi T_e^3}} e^{-\varepsilon/T_e}$ – функция распределения Максвелла,

удовлетворяющая нормировке $\int_0^{\infty} f(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = 1$, $q_b(\varepsilon)$ и $q_u(\varepsilon)$ – сечения возбуждения и ионизации соответственно. Функции $q_b(\varepsilon)$ и $q_u(\varepsilon)$ задаются по точкам из экспериментально измеренных зависимостей сечений от энергии электронов, приведенных в описании, или эти сечения аппроксимируются с помощью многочленов и полученные многочлены подставляются в подинтегральные выражения вместо параметров $q_b(\varepsilon)$ и $q_u(\varepsilon)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. По данным, полученным у преподавателя, составить числовые массивы для сечений возбуждения и ионизации $q_b(\varepsilon)$ и $q_u(\varepsilon)$. Затем аппроксимировать эти данные на ЭВМ с помощью многочленов и составить аппроксимационные функции для сечений $q_b(\varepsilon)$ и $q_u(\varepsilon)$.

2. Используя полученные многочлены, численно рассчитать зависимость $\varphi(\varepsilon)$. При этом интегралы (4.7) вычисляются с помощью формулы Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{6} \sum_{n=0}^N \left[f(a + nh) + 4f\left(a + \frac{(2n+1)h}{2}\right) + f(a + (n+1)h) \right],$$

где h - шаг интегрирования, $N = [(b-a)/h] + 1$ - количество точек разбиения. Пределы интегрирования выбрать самостоятельно и обосновать их выбор.

3. Используя рассчитанные числовые массивы для зависимости $\varphi(\varepsilon)$ с помощью графического пакета STATISTICA построить график функции $\varphi(\varepsilon)$.

Требования к работе

1. В отчет включить краткое описание задания.
2. Составить программу для расчета интегралов (4.7).
3. Вывести на печать значения средней энергии ε и соответствующие им значения k_b/k_u .
4. Построить на экране и вывести на печать графики зависимостей $k_b/k_u(\varepsilon)$ для гелия, неона и аргона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. – М., 1982.
2. Смирнов Б.М. Ионы и возбужденные атомы в плазме. – М., 1979.
3. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. – М.: Наука, 1987.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973.
5. Волков Е.А. Численные методы – М.: Наука. 1987. - 248 с.
6. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. – М.: Наука, 1982.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ВЫСОКОВОЛЬТНОГО НАНОСЕКУНДНОГО РАЗРЯДА В РЕЖИМЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВВИ

Цель работы: Рассчитать основные параметры ВВИ и оптического излучения разряда в цилиндрической трубке при заданных внешних условиях (давление газа и величина импульсов прикладываемого напряжения) при условии формирования в волноводе двух встречных волн ионизации одинаковой и разной полярности.

ТЕОРИЯ

Наносекундные газовые разряды в условиях формирования высокоскоростных волн ионизации (ВВИ) являются эффективными источниками оптического излучения, как на атомных, так и на молекулярных электронных переходах. Оптические свойства наносекундных разрядов в длинных трубках характеризуются наличием целого ряда релаксационных процессов, протекающих в различных областях трубки по-разному. Это разнообразие обусловлено в первую очередь запаздывающим характером возбуждения газа и затуханием ВВИ в процессе распространения.

В данной лабораторной работе предлагается исследование оптических свойств наносекундных разрядов при распространении в них нескольких волн ионизации. Для аналогии приведены результаты экспериментального исследования и сравнительный анализ оптических свойств исследуемого разряда в режимах распространения догоняющих и встречных волн ионизации, а также зависимость интенсивности излучения в разряде от давления в трубке и от амплитуды прикладываемого напряжения.

Разряд происходит в стеклянной трубке длиной 50 см и внутренним диаметром 4 мм, помещенной в металлический экран диаметром 2 см. Разрядная трубка снабжена внутренними электродами в виде полых цилиндров, сквозь которые

регистрируется оптическое излучение разряда. Для регистрации оптического излучения поперек трубки вдоль нее были размещены три оптических датчика на определенном расстоянии друг от друга. На трубку подавались импульсы напряжения, вырабатываемые генератором, собранным по трансформаторной схеме с импульсным трансформатором с ферритовыми сердечниками. Первичная обмотка трансформатора состояла из 4-х витков, а вторичная обмотка состояла из двух обмоток – по 12 витков в каждой. Схематическое изображение разрядной камеры, подключенной к трансформатору, дано на рисунке 11. Импульсный трансформатор ГИН собран по коаксиальной схеме.

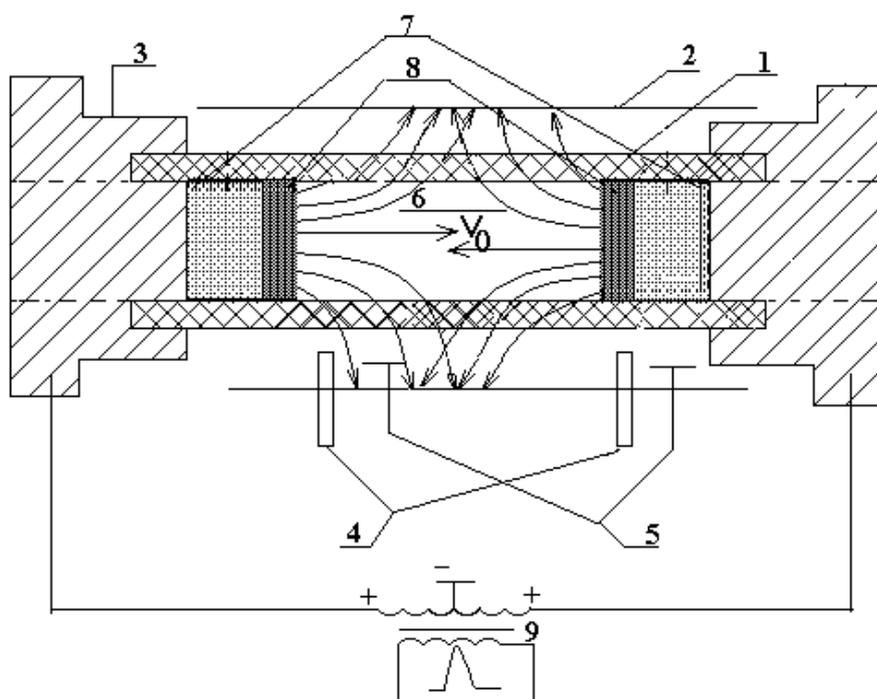


Рисунок 11. Схематическое изображение разрядной камеры. 1 – разрядная трубка, 2 – металлический экран, 3 – высоковольтный электрод, 4 – оптические датчики, 5 – емкостные датчики, 6 – силовые линии напряженности электрического поля, 7 – область фронта ВВИ, 8 – плазменный столб, 9 – трансформатор.

В качестве коммутирующего устройства в этой схеме ГИН использовался керамический тиратрон типа ТГИ-1000/25. Сигнал

регистрировался с помощью ФЭУ-76, ФЭУ-87. Сигнал с ФЭУ подавался на осциллограф типа С-75 с полосой усиления 10^9 Гц.

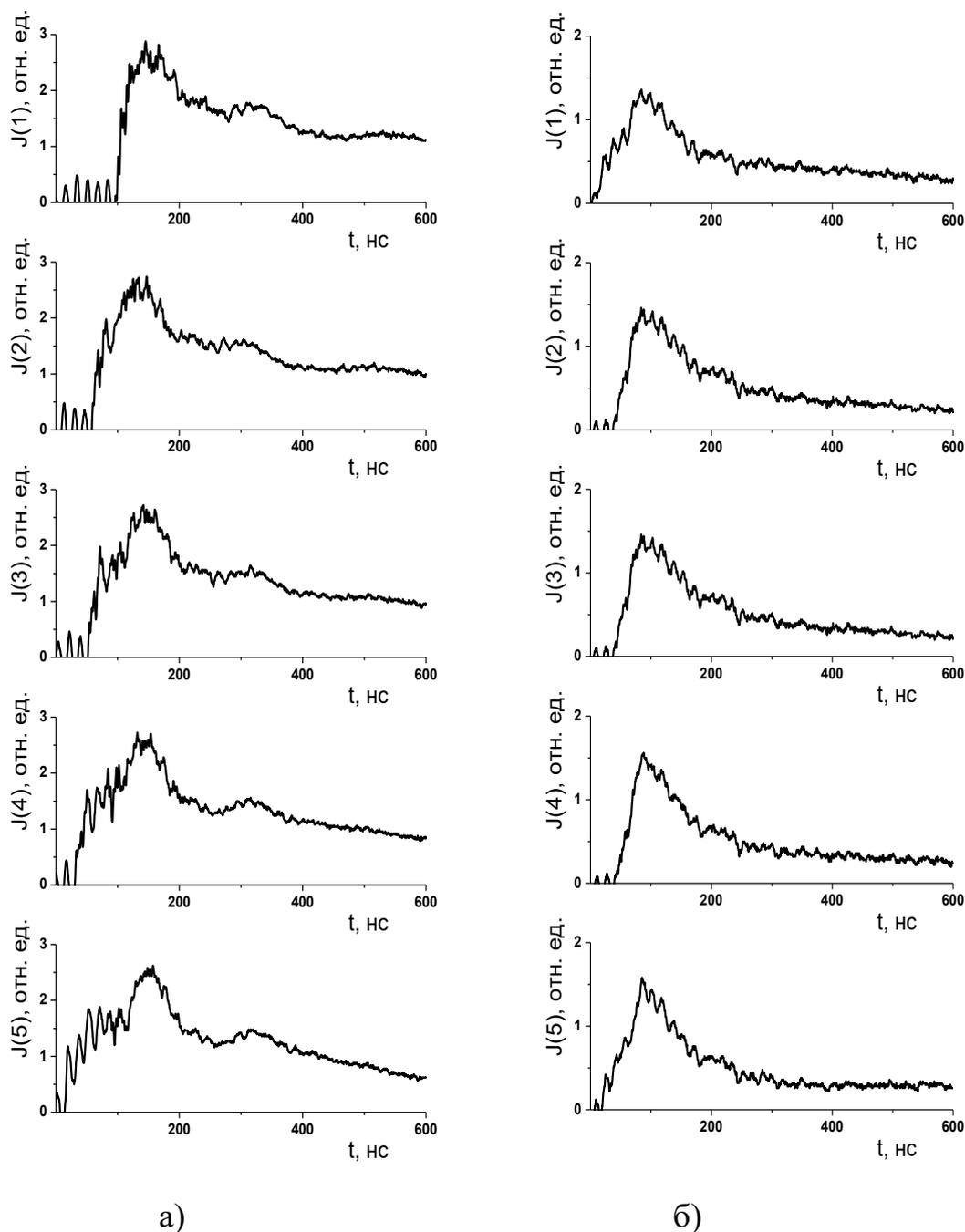


Рис.12. Осциллограммы интенсивностей излучения: а - со стороны 5 датчика подается положительный импульс напряжения, второй электрод заземлен; б - со стороны 1 датчика подается отрицательный импульс напряжения, со стороны 5 датчика - положительный ($p = 10 \text{ Тор}$; $U_0 = 28 \text{ кВ}$).

Форма импульсов оптического излучения разряда зависит от режима работы генератора импульсов напряжения (см. рисунок 11).

На рисунке 12 приведены осциллограммы, снятые поперек трубки. Как видно из этих осциллограмм амплитуда фронта импульса излучения в случае распространения догоняющих волн ионизации больше чем при встречных волн ионизации.

Как известно, разрядная трубка с экраном играет роль длинной линии с распределенными параметрами [2-4]. Из-за неполного согласования такой линии с генератором импульсов напряжения и нагрузкой на концах линии наблюдаются отражения волн напряжения и тока. Отраженные от концов разрядной трубки волны могут повторно возбуждать газ [2]. Величина и знак коэффициента отражения, как известно, зависят от сопротивления нагрузки R_n , включенной на конце длинной линии.

При сопротивлении на конце длинной линии, образованной разрядной трубкой и экраном, равном нулю (электрод замкнут на экран) или при его конечном значении на осциллограммах видны импульсы излучения, соответствующие возбуждению газа отраженной волной. При величине этого сопротивления равной $R_n = \infty$ (отвязанный электрод) возбуждение газа осуществляется только прямой волной ионизации. Однако, следует заметить, что форма импульсов излучения зависит еще и от того, заземлен ли экран или отвязан.

Для моделирования такой системы предполагается, что распространение высокоскоростных волн в наносекундном разряде имеет аналогию с распространением электрического потенциала по длинной линии или коаксиальному кабелю. Предлагаемая программа может быть использована как для исследования свойств наносекундного разряда, так и для определения параметров электрического потенциала по длинной линии. Для качественного описания протекающих процессов использованы телеграфные уравнения. Система уравнений решается методом сеток, программная реализация этого метода осуществлена в пакете MathCAD. Суть этого метода состоит в составлении разностных схем, в которых частные производные по x и t заменяются разностными производными. Оба уравнения системы с математической точки зрения представляют собой уравнения с частными производными первого порядка, с заданными начальными и граничными условиями.

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + L \frac{\partial I}{\partial t} + IR &= 0,\end{aligned}$$

где $\varphi(x, t)$ – мгновенное значение разности потенциалов между первым и вторым проводником в сечении x ; $I(x, t)$ – значение тока в том же сечении; R , C и L – распределенные сопротивление, емкость и индуктивность на единицу длины линии.

$$R = \frac{1}{(\pi \alpha a^2)}, \quad C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon}{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)}, \quad L = \frac{\varepsilon}{(Cc^2)},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость вещества, находящегося между трубкой и внешним экраном.

Построим в полосе, в которой поставлена задача Коши, сетки. Пусть $h > 0$ – шаг по x , тогда $x_m = m * h$, где $1 \leq m \leq M - 1$, а $0 < x < 1$, M – натуральное число, l – длина разрядной трубки и τ – шаг по t , тогда $t_n = n * \tau$, где $0 \leq n \leq N - 1$, а $0 < t < T$. Далее, опуская математические выкладки, заменив в системе уравнений частные производные по t и по x разностными производными по t и по x , приходим к разностным схемам:

$$\begin{cases} \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} = -L \frac{I_m^{n+1} - I_m^n}{\tau} - RI_m^n \\ \frac{I_{m+1}^n - I_{m-1}^n}{2h} = -C \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} \end{cases} \quad (5.1)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} U_m^0 = U_0(mh) = U_0 \exp\left(\frac{-(mh)^2}{(\gamma_0)^2}\right) \\ I_m^0 = I_0(mh) = I_0 \exp\left(\frac{-(mh)^2}{(\gamma_0)^2}\right) \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} U_0^n = U_0(n\tau) = U_0 \exp\left(\frac{-(-v_0 n \tau)}{(\gamma_0)^2}\right) \\ I_0^n = I_0(n\tau) = I_0 \exp\left(\frac{-(-v_0 n \tau)}{(\gamma_0)^2}\right) \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} U_M^n = U_0(n\tau) = U_0 \exp\left(\frac{-(l - mh - v_0 n\tau)}{(\gamma_0)^2}\right) \\ I_M^n = I_0(n\tau) = I_0 \exp\left(\frac{-(l - mh - v_0 n\tau)}{(\gamma_0)^2}\right) \end{cases} \quad (5.4)$$

Разрешая первое уравнение системы (5.1) относительно I_m^{n+1} , а второе уравнение относительно U_m^{n+1} получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_m^{n+1} = I_m^n - \frac{\tau R}{L} I_m^n - \frac{\tau}{L} \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h}\right) \\ U_m^{n+1} = U_m^n - \frac{\tau}{C} \left(\frac{I_{m+1}^n - I_{m-1}^n}{2h}\right) \end{cases} \quad (5.5)$$

Для решения этой системы уравнений в работе должна быть составлена программа, которая реализуется в пакете MathCAD.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Рассчитать основные параметры ВВИ соответствующие следующим условиям: диапазон давлений газа от 2 - 40 Тор при различных амплитудах импульсов напряжения, для спектральной линии *HeI* с длиной волны 388.8 нм. При условии формирования в волноводе двух встречных волн ионизации разной полярности.
2. Рассчитать основные параметры ВВИ соответствующие следующим условиям: диапазон давлений газа от 2 - 40 Тор при различных амплитудах импульсов напряжения, для спектральной линии *HeI* с длиной волны 388.8 нм. При условии формирования в волноводе двух встречных волн ионизации одинаковой полярности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М., 1982.
2. Смирнов Б.М. Ионы и возбужденные атомы в плазме. М., 1979.

3. Райзер Ю.П. Основы физики газоразрядных процессов. М.: Наука, 1980.
4. Бэдсел Ч. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоиздат, 1989.
5. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
6. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука. 1987. – 248 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С ФРОНТОМ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ВОЛНЫ ИОНИЗАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛНОВОДАХ

Цель работы: Получить графические зависимости скорости и координаты электронов в поле волны от времени и фазовый портрет (т.е. зависимость скорости электронов от координаты). Вычислить критического значения поля и концентрации частиц $E_{кр}$, $N_{кр}$ при которых происходит захват ускоренных электронов фронтом ВВИ.

ТЕОРИЯ

При волновом пробое ускоренные электроны формируются во фронте ВВИ. Теоретический анализ этого процесса достаточно сложная задача, и в настоящее время отсутствует замкнутая теория для его описания даже для простейшего вида волнового пробоя. Поэтому этот процесс можно представить на основе упрощенной модели взаимодействия волны ионизации со свободными электронами.

Для простоты оценок рассмотрим разряд в чистом газе. При волновом пробое электрическое поле сосредоточено в основном на фронте ВВИ. Пространственное распределение этого поля можно определить соотношением:

$$E(x, t) = -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x},$$

где $U(x, t)$ – потенциал ВВИ. Если длительность фронта волны ионизации равна τ , а ее скорость v_0 , то область локализации усиленного поля имеет размер $x_0 = v_0\tau$. Для условий данной работы $x_0 \ll L$, где L – длина разрядной трубки.

Свободные электроны, попадающие в область усиленного поля фронта волны, с одной стороны ускоряются в этом поле, с другой теряют часть энергии в результате соударений с атомами газа. Для сильных полей, характерных для фронта ионизации

потеря энергии электронами определяется в основном неупругими столкновениями. При этом энергия, теряемая на единице длины пути можно описать силой эффективного торможения $F(v)$. В нерелятивистском приближении выражение для $F(v)$ имеет следующий вид:

$$F(v) = \frac{4\pi e^4 N_0 z}{m v^2} \ln \frac{m v^2}{I} \quad (6.1)$$

где N – плотность газа, z – число электронов в атоме, v – скорость свободных электронов, I – так называемая средняя энергия возбуждения или средняя энергия неупругих потерь, e и m – соответственно, заряд и масса электрона. Значение для параметра I определяется выражением

$$\ln I = \sum_k f_{k0} \ln(E_k - E_0), \quad (6.2)$$

где f_{k0} – силы осцилляторов, E_k – энергия k -го состояния. Суммирование в (6.2) ведется как по дискретному, так и по непрерывному спектру атома, поэтому точный расчет I представляется достаточно трудной задачей. На практике обычно значение I берется из эксперимента, но для тяжелых атомов эту величину можно оценить с помощью метода Томаса-Ферми. Для атомов гелия с $z=2$ можно получить $I \sim 44$ эВ.

Очевидно, что выражение (6.2) справедливо при скоростях $v > \sqrt{\frac{2I}{m}}$. При таких значениях v , характерных для электронов во фронте волны ионизации, их рассеяние назад в результате соударений с атомами газа мало.

АЛГОРИТМ ПРОГРАММЫ

Алгоритм работы основной части программы представлен нижеследующих 7 блоках:

Блок 1. Присвоить начальные значения расчетным параметрам и константам, используемым в программе: I , q , z , k , T , l , m , v_0 и τ

Блок 2. Вести формулы для расчета критического значения поля и концентрации частиц $E_{кр}$, N .

Блок 3. Составить вектор начальных условий y .

Блок 4. Присвоить некоторой переменной $F(x, y)$ систему из двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (6.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) + \alpha E_0 \exp\left(-\frac{(l-x)^2}{x_0^2}\right) - \beta \frac{N_0}{(v' + v_0)^2} \ln \gamma(v' + v_0)^2 \quad (6.4)$$

Блок 5. Решение данной системы уравнений провести с использованием встроенной в систему MathCAD функции $rkfixed(y, x1, x2, n, F)$, которая возвращает матрицу решений системы уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка при фиксированном шаге по x . Здесь y – вектор начальных условий; $x1$ и $x2$ – границы интервала для поиска решения; n – количество точек на интервале; $F(x, y)$ – вектор-функция первых производных.

Блок 6. Для получения матрицы значений набрать Z

Блок 7. Построить графические зависимости скорости и координаты электронов в поле волны от времени и фазовый портрет (т.е. зависимость скорости от координаты).

УПРАЖНЕНИЕ

Исследование механизмов взаимодействия волн ионизации с ускоренными электронами

Особенный интерес представляет захват электронов фронтом ВВИ. Уравнение движения в области взаимодействия двух ВВИ будет иметь вид:

$$x'' = \frac{e}{m} E_{01}(x - v_0 t) + \frac{e}{m} E_{02}(x + v_0 t) - \frac{4\pi e^4 N_0 z}{m^2 v^2} \ln \frac{mv^2}{I} \quad (6.5)$$

Электроны во фронте «общей» волны ионизации переходят в режим непрерывного ускорения, если правая часть уравнения (6.5) больше нуля. При этом нужно иметь в виду, что в случае волнового пробоя область усиленного поля перемещается вдоль трубки со скоростью v_0 . Если в результате ускорения электронов их скорость окажется выше скорости ВВИ, то они будут двигаться впереди фронта волны ионизации, то есть выйдут из области усиленного поля и тем самым нарушится условие убегания (торможение будет

превалировать над ускорением). И наоборот, если за время взаимодействия с фронтом волны ионизации электроны не успевают набрать скорость, сравнимую со скоростью волны ионизации, то они отстанут от ВВИ. Таким образом, для установления критерия убегания электронов при волновом пробое в рамках принятой модели нужно анализировать уравнение движения (6.5).

Так как $E(x - \nu_0 t)$ и $E(x + \nu_0 t)$ будем описывать Гауссовыми функциями с шириной x_0 , равной протяженности фронта ВВИ, то для общего поля двух волн, движущихся навстречу друг другу, имеем:

$$E(x, t) = E_{01} \exp\left(-\frac{(x - \nu_0 t)^2}{x_0^2}\right) + E_{02} \exp\left(-\frac{((l - x) + \nu_0 t)^2}{x_0^2}\right) \quad (6.6)$$

Уравнение (6.5) с помощью преобразования $x' = x - \nu_0 t$ с учетом (6.6) приводится к виду (записанному для удобства в старых обозначениях):

$$x'' = \alpha E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) + \alpha E_0 \exp\left(-\frac{(l - x)^2}{x_0^2}\right) - \frac{\beta N}{(x' + \nu)^2} \ln[\gamma(x' + \nu_0)^2] \quad (6.7)$$

Здесь $E_{01} = E_{02} = E_0$, $\alpha = \frac{e}{m}$; $\beta = \frac{4\pi e^4 z}{m^2}$ и $\nu \equiv x'$, l – длина трубки.

Запишем уравнение (6.7) в виде системы:

$$x' = y \text{ и } y' = \Phi(x, y) \quad (6.8)$$

Стационарные точки данной системы находятся из системы алгебраических уравнений: $y = 0$ и $\Phi(x, y) = 0$ которые, очевидно, сводятся к следующему нелинейному алгебраическому уравнению:

$$\Phi(x, 0) = \alpha E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) + \alpha E_0 \exp\left(-\frac{(l - x)^2}{x_0^2}\right) - \frac{\beta N}{\nu_0^2} \ln(\gamma \nu_0^2) = 0 \quad (6.9)$$

Такая задача точного решения не имеет, и решается приближенными численными методами. В данной работе эта задача решается методом Рунге-Кутты. В принципе расчет с определенной точностью приводит к тем же значениям критических параметров, при которых возможен захват электронов, что и для случая одиночных волн. И это легко объяснимо, притом, что ни один из критических параметров, при которых имеет место захват электронов полем волны ионизации, не зависит от того, из

каких составляющих будет складываться это поле. Главное чтобы при критическом значении:

$$v_0 = \bar{v} = \sqrt{\frac{2.72I}{m}} \quad (6.10)$$

выполнялось равенство:

$$\frac{E_0}{N} > \frac{\beta\gamma}{2.72\alpha} = \frac{2\pi e^3 z}{2.72I}. \quad (6.11)$$

Другими словами, захват электронов фронтом ВВИ или их синхронизованное движение происходит при некотором оптимальном значении параметра $\frac{E_0}{N}$. Скорость таких электронов в лабораторной системе координат будет колебаться вблизи значения, определяемого равенством (6.10). Нетрудно заметить, что при таких скоростях сила эффективного торможения $F(v)$ принимает свое максимальное значение. Это означает, что при таких скоростях максимальна эффективность неупругих соударений.

Уравнение движения приведено к системе уравнений (6.3 - 6.4). Эта система дифференциальных уравнений решается методом Рунге-Кутты, с программной реализацией в пакете MathCAD.

ОТЧЕТ К РАБОТЕ

1. В отчет необходимо включить краткое описание задания.
2. Результаты расчетов представить в виде графических зависимостей параметров от времени, а также зависимостей одного из параметров от другого, в частности, $v(x)$ так называемый фазовый портрет.
3. Расчеты провести при различных начальных условиях, представленных преподавателем.
4. Обдумать полученные результаты, сделать выводы и подготовить работу к защите.

ЛИТЕРАТУРА

7. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. – М., 1982.
8. Смирнов Б.М. Ионы и возбужденные атомы в плазме. – М., 1979.
9. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. – М.: Наука, 1987.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973.
11. Волков Е.А. Численные методы – М.: Наука. 1987. - 248 с.
12. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. – М.: Наука, 1982.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОБЛАСТЕЙ УСИЛЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И НЕКОМПЕНСИРОВАННОГО ЗАРЯДА В ПЛАЗМЕ

Цель работы: Рассчитать характерное распределение плотности нескомпенсированного заряда ($n_i - n_e$) и распределение потенциала между электродами, обусловленное этим зарядом в наносекундном разряде с полым катодом при заданных начальных условиях

ТЕОРИЯ

В научной литературе еще с позапрошлого века сформировались две концепции описания явлений формообразования структур в газоразрядной плазме. К приверженцам первой концепции можно отнести: Л. Леба, явно утверждавшего, что явления в искре нельзя свести только к тепловому нагреву (изменению только N); И. Г. Кесаева, искавшего взрывные процессы в плазме, приводящие к взрывам катодов и их последователей считающих, что в плазменных явлениях имеет место сложное, нелинейное взаимодействие электрического поля (E) с плазмой, приводящее, то к кумуляции электрического поля ($E\uparrow$), то к его распылу или исчезновению (диссипации – $E\downarrow$).

В работах этих исследователей показано, что именно такое нелинейное взаимодействие и приводит к самоформированию плазменных линз – аттракторов, фокусирующих потоки электронов и ионов. Такая фокусировка (ионный фокус) в катодном пятне может взрывать даже полированные катоды. При этом фокусировка напряженности электрического поля в областях аттрактора, обусловленная кумуляцией объемного заряда ионов обеспечивает локально неоднородный нагрев газа и объяснение сложного «обратного» перемещения плазменных структур или плазмоидов у катода в поперечном магнитном поле, открытое Штарком. Эксперименты Штарка являются подтверждением справедливости кумулятивной модели положительно заряженного катодного пятна. Согласно этой модели слабоэнергетичные электроны, являющиеся

частью катодного пятна, фокусируются в пятно – положительно заряженную динамическую структуру. Значит, их поток направлен к катоду. Высокоэнергетичные электроны, сформированные в пучок, быстро покидают катодное пятно и не являются элементом катодного пятна. Поэтому катодное пятно в поперечном магнитном поле и двигается в «обратном» направлении, доказывая, что слабоэнергетичные электроны фокусируются в катодное пятно, а не устремляются с высокоэнергетичным пучком к аноду. Коллективное поведение заряженных частиц плазмы в их потоках в плазменных структурах управляется дальнедействующим электрическим полем. Профили этого поля и определяют визуализацию плазмOIDов.

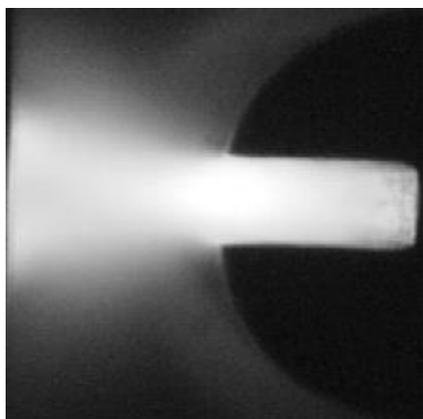
Ко второй не менее многочисленной группе исследователей можно отнести Н.А. Капцова, Н.Л. Александрова, А.Н. Старостина, А.П. Напартовича и их сторонников, считавших и считающих, что процессы в плазменных структурах сводятся, в основном, к неоднородностям тепловыделения или тепловому следу, формированию тепловой линзы, тепловой лакуны с термической или ступенчатой неустойчивостями. Согласно последней концепции параметр E/N изменяется только из-за изменения N , колебательного возбуждения или возбуждения электронных степеней свободы. Структурные пульсации (смена кумуляции диссипацией), обусловленные особенностями фокусировки процессов переноса, в плазме в их работах не затрагиваются. В этой концепции нет места кумулятивно-диссипативному нелинейному взаимодействию электрического поля, как особой, пульсирующей в пространстве компоненте плазмы, с остальными иначе пульсирующими компонентами плазмы.

Сторонники первой концепции не отрицают роль процессов нагрева газа, определяющих N – плотность газа и соответствующего увеличения параметра E/N , определяющего эффективную энергию электронов в этой области, а, следовательно, и свечение из этой области. Но считают, что кумуляция внутренних электрических полей в кумулятивно-диссипативных (КД) – структурах способствует эффективному перетеканию энергии внешнего источника и слабоэнергетических электронов, ускоряемых синергетическим полем ионов в энергию пучка высокоэнергетических электронов, формирующих пучок в

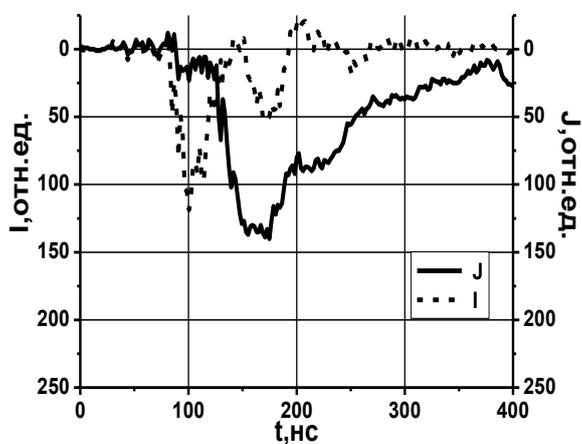
плазменных КД-структурах. Топология синергетических электрических полей в структурах плазмы определяет формообразование и жизнедеятельность плазмодов в большей степени и зачастую в дальнейшем определяют и формы теплового нагрева. При этом полагают, что в основе явления самоорганизации электрического поля в сплошной среде лежат все же кумулятивные явления, происходящие в плазме при формировании структур, как с областями самостоятельного, так и с областями несамостоятельного разряда, контролируемого пучком высокоэнергетических электронов, формируемым в областях потенциальных ям. Плазменные структуры обусловлены самофокусировкой потоков электронов к центру потенциальной ямы, ускорением электронов по мере их фокусировки, рождением в центре фокусировки новых ионов и генерацией кумулятивных пучков высокоэнергетических электронов, быстро покидающих потенциальную яму.

В газовых разрядах при определенных условиях электрическая энергия внешнего источника может пойти на разметку среды и последующую ее модификацию, обусловленную асимметрией масс заряженных частиц. В результате среда модифицируется, заряжается объемным зарядом, в ней формируются скачки с объемным зарядом, слои, шары и т.д. Формирование структур происходит из-за активации среды и нарушения ее нейтральности и сопровождается пульсированием электрических полей и потоков частиц плазмы, как в пространстве, так и во времени. Подобная картина в наносекундных плазменно-пучковых разрядах с протяженным полым катодом наблюдается при повышенных значениях напряжения горения. В качестве иллюстрации на рисунке 13 представлена характерная оптическая картина пространственной структуры разряда и соответствующие ей импульсы разрядного тока и оптического излучения в гелии с катодом с прямоугольной полостью. На оптической картине видно, что у выхода из щели катода формируется яркое пятно формы эллипса с максимальной интенсивностью излучения в центре. При этом на импульсах разрядного тока и оптического излучения наблюдаются по два максимума. Максимумы на импульсе излучения разряда связаны с максимумами разрядного тока. Сопоставление импульсов разрядного тока и излучения с

оптической картиной разряда показывает, что длительность и форма импульсов тока и излучения определяются динамикой формирования структуры разряда, которая существенным образом влияет на перенос тока в разрядном промежутке. Интенсивность излучения из ярко светящей области у выхода из полости катода многократно больше, чем интенсивность излучения из других областей разряда, что свидетельствует о неравномерном распределении концентрации возбужденных атомов и ионов, следовательно, и заряженных частиц в разрядном промежутке.



(a)



(b)

Рисунок 13. а – пространственное распределение интенсивности оптического излучения; б – импульсы тока и излучения разряда ($p = 10 \text{ Тор}$).

При определенных условиях в разряде могут формироваться области с нарушением нейтральности с размерами, намного превосходящими величину радиуса Дебая. При характерных для газоразрядной плазмы значениях $n_e \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и $T_e \sim 1 \text{ эВ}$ величина дебаевского радиуса $r_d \sim 10^{-4} \text{ см}$, в то время как реально наблюдаемый размер изменения концентрации заряженных частиц и напряженности радиального электрического поля составляет 0.1 см (рисунок 13). Нарушение нейтральности определяют внутренние синергетические поля в плазменной структуре, и тем

модифицирует внешнее силовое поле, приложенное к разрядному промежутку. Модифицированные электрические поля в свою очередь формируют и структурируют в пространстве и времени заряженные структуры. Процесс взаимодействия плазмы и модифицируемого самосогласованного электрического поля нелинейный. Этот процесс сопровождается усилением или кумуляцией объемного заряда, увеличением частоты ионизации газа прямым электронным ударом, взрывным ростом силового радиального электрического поля, проникающего в плазменные структуры и многими другими явлениями возбуждения новых степеней свободы. Из-за эффективности кулоновских электрон-электронных столкновений заряженные структуры одновременно играют роль фокусирующих, направляющих и ускоряющих электроны в кумулятивную струю плазменных линз. В формировании электронных ускорителей различной геометрии из-за нарушения нейтральности и заключается глубокая функциональность заряженных структур для переноса и ускорения электрических зарядов до энергий перепада электрического потенциала.

Картина формирования области кумуляции электрического поля и заряженных частиц в разряде у выхода из полости катода следующая. При повышенных значениях прикладываемого поля, после проникновения плазмы внутрь полости катода, за счет усиления ионизационных процессов плотность плазмы в полости катода многократно возрастает, и она начинает играть роль плазменного катода, который становится основным эмиттером электронов, что приводит к увеличению разрядного тока, более чем на порядок (1-й максимум на импульсе тока рисунка 1). Формирование плазменного катода можно объяснить тем, что электроны, ускоренные в катодном слое в процессе многократного отражения от боковых поверхностей щели, производят дополнительную ионизацию. Эти ускоренные и вторичные электроны, в процессе своего движения в сторону анода, могут накапливаться у выхода из полости и тем самым компенсировать положительный пространственный заряд. При этом прекращается подвод энергии внутрь полости катода, и разряд выталкивается из полости. В течение времени порядка 10 нс после пробоя формируется плазменный катод в последующие моменты времени,

из которого происходит интенсивное вытягивание плазменных электронов внешним полем. Поскольку дрейфовая скорость электронов в инертных газах на порядки больше дрейфовой скорости ионов электроны быстро покидают область повышенной ионизации у выхода из полости катода. Кроме этого у выхода из полости катода происходит резкое расширение разряда, и поскольку разряд в промежутке между электродами с двух сторон является открытым быстрые электроны за счет диффузии в поперечном направлении уходят из области разряда. Эти два механизма, которые включаются одновременно, приводят к появлению области нескомпенсированного положительного заряда у выхода из щели катода со стороны разрядного промежутка. В дальнейшем эта область положительного заряда начинает играть роль виртуального анода и замыкает на себя ток свободных электронов.

В соответствии с кумулятивным подходом ярко светящуюся область (рисунок 13) можно отождествить, не только с проводящей областью, в центре которой параметры $(E/N, n_e/N)$ достигают критических значений, но и с областью с поверхностью разделяющей скачком две области, в одной из которых происходит мощная генерация тока и соответственно область, где отсутствует проводимость. На этой стадии величина анодного тока падает до нуля (рисунок 13). Из-за нарушения квазинейтральности появляется внутреннее электрическое поле, направленное к центру области с избыточным положительным объемным зарядом существенно превосходящее продольное внешнее поле. В эту область устремляются свободные электроны, и происходит кумуляция напряженности электрического поля и концентрации электронов к центру области (рисунок 14а).

Имеет место формирование притягателя (плазмоида) с кумулятивными струями (пучком электронов), осуществляющий фокусировку и вынос электронов из области кумулятора (рисунок 14b). На этой стадии появляется второй максимум на осциллограммах разрядного тока и оптического излучения (рисунок 13).

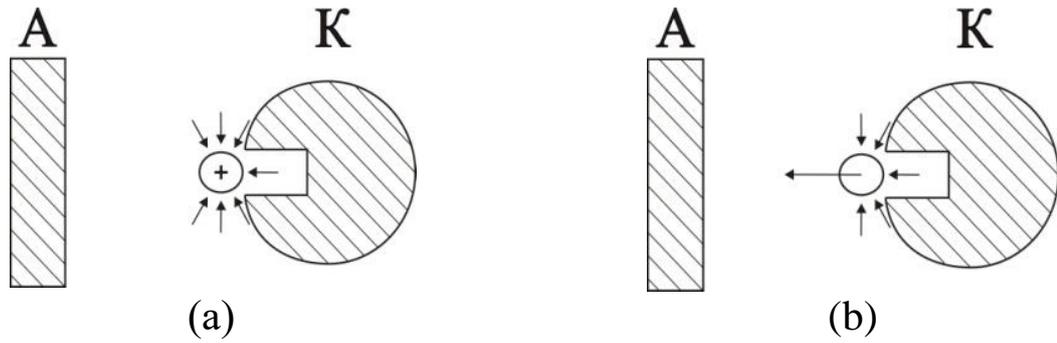


Рисунок 14. Схема формирования виртуального анода и фокусировки потоков электронов.

Для количественной оценки формирования плазменной структуры у выхода из щели в катоде можно использовать систему дифференциальных уравнений, которая состоит из уравнений для изменения концентраций электронов и ионов, а также напряженности электрического поля в разрядном промежутке. Для наносекундных разрядов в инертных газах с параметрами $(E/N)_p$ порядка 100 Td и давления газа в несколько десятков Тор внутренние поля определяются только ионизацией прямым электронным ударом и дрейфовым переносом электронов в электрическом поле, формируемом объемным зарядом. Исходя из этого, учтены, при составлении системы уравнений только прямая ионизация из основного состояния и дрейфовый уход электронов из разрядного промежутка. Система уравнений для начальных стадий развития разряда имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e v_{ex})}{\partial x} + \frac{\partial(n_e v_{ey})}{\partial y} &= \nu_i n_e \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i v_{ix})}{\partial x} + \frac{\partial(n_i v_{iy})}{\partial y} &= \nu_i n_e \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 4\pi e(n_i - n_e) \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $v_{ex} = \mu_e E_x$; $v_{ey} = \mu_e E_y$; $v_{ix} = \mu_i E_x$; $v_{iy} = \mu_i E_y$; $E_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $E_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; φ – потенциал на аноде; μ_e и μ_i – подвижность электронов и ионов; ν_i – частота ионизации атомов электронным ударом; $N_0 = 3.3 \times 10^{16} p$ Торр \times см $^{-3}$ – концентрация нейтральных атомов; v_e – скорость

электронов; E – напряженность электрического поля, $e = 4.803 \times 10^{-10}$ ед. СГСЭ; $L = 0.6$ см; $y_1 = 0.3$ см.

Начальные и граничные условия можно выбрать исходя из условий эксперимента.

Начальные условия:

$$\varphi(t=0, x, y) = \varphi_0 \psi(y) \text{ ед. СГСЭ, } \varphi_0 = 0.5 - 3 \text{ ед. СГСЭ.}$$

$$n_e(t=0, x, y) = n_i(t=0, x, y) = n_{e_0} \psi(y) \text{ см}^{-3}, \quad n_{e_0} = 10^{11} \text{ см}^{-3},$$

где $\psi(y)$ – некоторая функция, характеризующая поперечный профиль распределения электрического потенциала, вводимый из соображений о том, что у выхода из щели в катоде разряд практически свободно расширяется, поскольку стенки разрядной камеры удалены от области разряда.

Граничные условия:

$$\varphi(t, x=0, y) = 0, \quad \varphi(t, x=L, y) = \varphi_0,$$

$$n_e(t, x=0, y) = n_i(t, x=0, y) = 0, \quad n_e(t, x=L, y) = n_{e_0},$$

$$n_i(t, x=L, y) = n_{e_0} + \varphi_0 / Le$$

$$n_e(t, x, y=-y_1) = n_i(t, x, y=-y_1) = n_{e_0} \psi(y=-y_1),$$

$$n_e(t, x, y=y_1) = n_i(t, x, y=y_1) = n_{e_0} \psi(y=y_1).$$

Для поперечного профиля распределения электрического потенциала, электронов и ионов рассмотрим два случая:

1. с единичной пси функцией $\psi(x, y) = 1$ (в распределении рассматриваемых величин отсутствуют поперечные неоднородности),

2. $\psi(x, y) = \psi_0 x \exp\left(-\frac{y}{0.2}(x(L-x))\right)$ (наличие поперечных

неоднородностей рассматриваемых величин, уменьшающихся к электродам).

Для составления разностной схемы численного решения системы дифференциальных уравнений (7.1), преобразуем следующим образом.

Рассмотрим первое уравнение системы (7.1):

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e v_{ex})}{\partial x} + \frac{\partial(n_e v_{ey})}{\partial y} = v_i n_e,$$

Это уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(n_e \mu_e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(n_e \mu_e \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = v_i n_e.$$

Отсюда

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \mu_e \frac{\partial n_e}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu_e \frac{\partial n_e}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu_e n_e \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = v_i n_e. \quad (7.2)$$

В то же время, третье уравнение системы (7.1) представимо в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 4\pi e(n_i - n_e). \quad (7.3)$$

Уравнение (7.2) с учетом (7.3) примет вид:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \mu_e \frac{\partial n_e}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu_e \frac{\partial n_e}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu_e n_e 4\pi e(n_i - n_e) = v_i n_e.$$

В итоге, из (7.1) получаем новую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \mu_e \left(\frac{\partial n_e}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial n_e}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + 4\mu_e n_e \pi e(n_i - n_e) &= v_i n_e, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} &= v_i n_e - \frac{\partial(n_i v_{ix})}{\partial x} - \frac{\partial(n_i v_{iy})}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 4\pi e(n_i - n_e). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Для составления разностной схемы системы (7.4) введем следующие обозначения: i – порядковый номер строки рассматриваемой сетки, j – порядковый номер столбца, k – номер временного слоя. Тогда отдельные слагаемые уравнений можно представить в следующем разностном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} &= \frac{n_{ei,j}^{k+1} - n_{ei,j}^k}{\Delta t}, & \frac{\partial n_i}{\partial t} &= \frac{n_{ii,j}^{k+1} - n_{ii,j}^k}{\Delta t}, \\ \frac{\partial n_e}{\partial x} &= \frac{n_{ei+1,j}^k - n_{ei-1,j}^k}{2\Delta x}, & \frac{\partial n_e}{\partial y} &= \frac{n_{ei,j+1}^k - n_{ei,j-1}^k}{2\Delta y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k}{2\Delta x}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{2\Delta y}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k}{\Delta x^2}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\varphi_{i,j+1}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i,j-1}^k}{\Delta y^2}. \end{aligned}$$

С учетом этого, получим следующие разностные уравнения:

$$\begin{aligned}
& \frac{n_{ei,j}^{k+1} - n_{ei,j}^k}{\Delta t} + \mu_e \left(\frac{n_{ei+1,j}^k - n_{ei-1,j}^k}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + \frac{n_{ei,j+1}^k - n_{ei,j-1}^k}{2\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \right) + \\
& + 4\mu_e n_{ei,j}^k \pi e (n_{ii,j}^k - n_{ei,j}^k) = v_i n_{ei,j}^k \\
& \frac{n_{ii,j}^{k+1} - n_{ii,j}^k}{\Delta t} = v_i n_{ei,j}^k \\
& \frac{\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} = 4\pi e (n_{ii,j}^k - n_{ei,j}^k).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Как видно, разностная схема построена в явном виде. Шаги по координатам x и y , и времени t выбирались таким образом, чтобы схема была устойчивой. Решение первых двух уравнений системы (7.5) дает нам рекуррентные формулы для n_e и n_i в явном виде:

$$\begin{aligned}
n_{ei,j}^{k+1} = & v_i n_{ei,j}^k \Delta t + n_{ei,j}^k - \mu_e \Delta t \left(\frac{n_{ei+1,j}^k - n_{ei-1,j}^k}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + \frac{n_{ei,j+1}^k - n_{ei,j-1}^k}{2\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \right) - \\
& - 4\mu_e n_{ei,j}^k \pi e (n_{ii,j}^k - n_{ei,j}^k) \Delta t
\end{aligned}$$

и

$$n_{ii,j}^{k+1} = v_i n_{ei,j}^k \Delta t + n_{ii,j}^k.$$

Для решения третьего уравнения системы (7.5) применялся алгоритм Либмана. Суть его сводится к следующему. Уравнение разрешается относительно величины $\varphi_{i,j}$.

$$\varphi_{i,j}^{s+1} = \frac{(\varphi_{i+1,j}^s + \varphi_{i-1,j}^s) \Delta y^2 + (\varphi_{i,j+1}^s + \varphi_{i,j-1}^s) \Delta x^2 - 4\pi e \Delta x^2 \Delta y^2 (n_{ii,j}^k - n_{ei,j}^k)}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \tag{7.6}$$

где s – порядковый номер итерации в алгоритме Либмана.

Затем рассчитанное значение потенциала $\varphi_{i,j}^{s+1}$ опять подставляется в уравнение (7.6) вместо $\varphi_{i,j}^s$ и получается следующее итерационное значение для потенциала $\varphi_{i,j}^{s+1}$. Значения потенциала, полученные на каждой итерации, сравниваются с предыдущими значениями. Итерационный процесс прерывается при достижении нужной точности в вычислении значения потенциала. Значения концентраций электронов и ионов остаются неизменными на всем протяжении вычислений алгоритма Либмана для данного временного слоя.

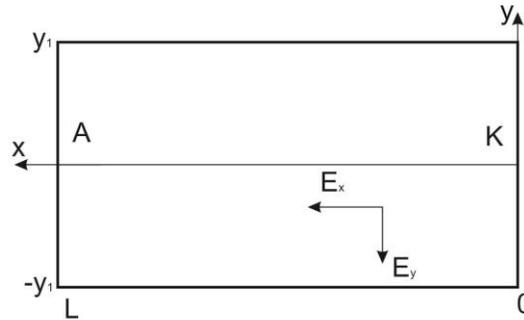


Рисунок 15. Схематическое изображение области распределения параметров плазмы.

Решить поставленную задачу необходимо в среде MathCAD для области, приведенной на рисунке 15. Начало системы координат совмещено с поверхностью катода.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассчитать характерное распределение плотности нескомпенсированного заряда ($n_i - n_e$) между электродами при начальных условиях:
 - $\varphi_0 = 0.5$ ед. СГСЕ, $p = 10$ Тор;
 - $\varphi_0 = 1.5$ ед. СГСЕ, $p = 10$ Тор;
 - $\varphi_0 = 3$ ед. СГСЕ, $p = 10$ Тор.
2. Рассчитать характерное распределение потенциала между электродами, обусловленное нескомпенсированным зарядом при начальных условиях:
 - $\varphi_0 = 0.5$ ед. СГСЕ, $p = 10$ Тор;
 - $\varphi_0 = 1.5$ ед. СГСЕ, $p = 10$ Тор;
 - $\varphi_0 = 3$ ед. СГСЕ, $p = 10$ Тор.
3. Объяснить причины и природу формирования локальной области нескомпенсированного заряда и усиленного электрического поля в промежутке наносекундного разряда с протяженным полым катодом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кесаев И. Г. Катодные процессы электрической дуги. – М.: Наука, 1968. – 244 с.
2. Высикайло Ф.И. Кумуляция электрического поля в диссипативных структурах в газоразрядной плазме// ЖЭТФ. 2004. Т. 125. № 5. С. 1071-1081.
3. Кудрявцев А.А., Смирнов А.С., Цендин Л.Д. Физика тлеющего разряда. СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 512 с.
4. Голубовский Ю.Б., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д. и др. Кинетика электронов в неравновесной газоразрядной плазме: Издательство СПб ГУ, 2004. – 248 с.
5. Ашурбеков Н.А., Иминов К.О. Наносекундные электрические разряды с полым катодом. – Махачкала. ИПЦ ДГУ, 2012. – 164 с.
6. Бэдсел Ч. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоиздат, 1989.
7. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИИ СРЕДНЕЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ЗАСЕЛЕННОСТЕЙ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМОВ В ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЕ

Цель работы Освоение методов численного моделирования релаксации энергии электронов с учетом упругих, неупругих столкновений и диффузии, а также заселенностей возбужденных состояний атомов с учетом различных элементарных процессов в газоразрядной плазме

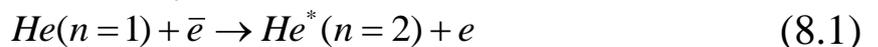
ТЕОРИЯ

Известно, что в заселении возбужденных состояний атомов плазмы участвует большое количество элементарных процессов. Кроме того, короткий диапазон времени релаксации энергии свободных электронов со временем приводит к быстрой смене одних основных механизмов образования возбужденных атомов другими. Экспериментальное исследование большого количества быстро протекающих элементарных процессов сталкивается с определенными трудностями и для их изучения широко применяется численное моделирование. Рассмотрим роль таких процессов в заселении возбужденных состояний атомов гелия (*HeI*) с главным квантовым числом $n=2, 3$ и 4 . Поскольку основные механизмы заселения возбужденных состояний атомов гелия с различными n могут отличаться друг от друга, то заселение уровней с $n=2$ и $n=3,4$ рассмотрим отдельно.

Механизмы заселения уровней *HeI* с $n = 2$

В заселении уровней *HeI* с $n=2$ основную роль играют следующие процессы:

1. Прямое электронное возбуждение из основного состояния:



Здесь \bar{e} и e быстрый и медленный электрон соответственно. Эффективную константу скорости процесса (8.1) можно оценить по

следующей формуле, где под параметром T_e понимается средняя энергия электронов:

$$K_{12} = 8.71 \times 10^{-6} \frac{\Lambda_1}{\sqrt{T_e}(E_1 - E_2)} \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{T_e}\right) \quad (8.2)$$

$$\Lambda_1 = a \left(\frac{T_e}{\Delta E_1}\right)^b \begin{cases} a = 0.03; b = 4/9 & \text{при } \frac{T_e}{\Delta E_1} \leq 0.07 \\ a = 0.25; b = 6/9 & \text{при } \frac{T_e}{\Delta E_1} \geq 0.07 \end{cases}$$

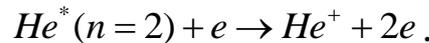
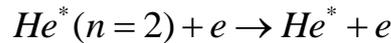
или

$$\Lambda_1 = 3 - 4 \quad \text{при } T_e / \Delta E_1 \geq 10,$$

где $\Delta E_1 = E_1 - E_2$.

Для атомов гелия $\Delta E_1 = 20.5$ эВ. Поскольку в формуле (8.2) аргументом \exp служит величина $-\Delta E_1 / T_e$, то с уменьшением T_e констант K_{12} уменьшается по экспоненциальному закону.

2. Ступенчатое возбуждение и ионизация с уровней HeI ($n = 2$):



Константу ступенчатого возбуждения K_{CT} можно оценить по формуле Томсона, если $T_e \geq \Delta E_{mc}$:

$$K_{CT} = 2\pi e^4 (1 - \Delta E_{mc} / T_e) / \sqrt{2mT_e} \Delta Z E_{mc},$$

где ΔE_{mc} – порог ступенчатого возбуждения, или же по формуле (6.2).

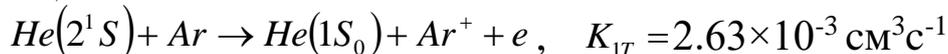
Константу ионизации из указанных состояний можно определить по формуле Дравина [1]:

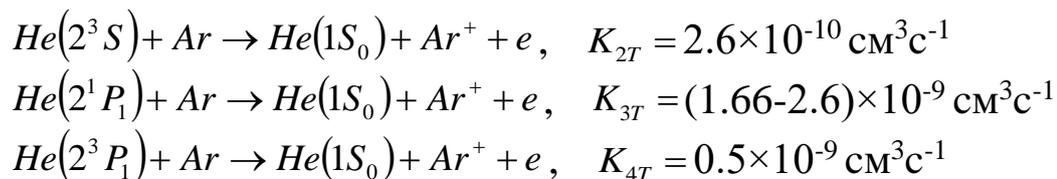
$$\beta_{2e} = 8\pi\alpha_0^2 \left(\frac{Ry}{E_2}\right) f_2 N \sqrt{\frac{2T_e}{\pi m}} U_1 \psi(U_1), \quad (8.3)$$

где $Ry = 13.6$ эВ, $U_1 = E_2 / T_e$, N – число эквивалентных электронов в данной оболочке, f_2 – сила осциллятора свободно-связанного перехода. Функция $\psi(U_1)$ затабулирована в [1].

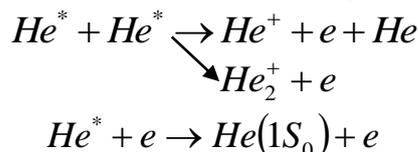
3. Тушение возбужденных атомов гелия [2].

Здесь одним из основных могут быть процессы пеннинговской ионизации:



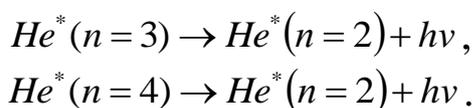


Напротив каждой реакции указана соответствующая константа. Помимо реакции с участием атомов аргона, в тушении возбужденных атомов гелия могут участвовать электроны и собственные возбужденные атомы в следующих реакциях:



Суммарные константы скорости для таких реакций имеют величины порядка $(1-5) \times 10^{-9} \text{ см}^3/\text{с}$ в зависимости от состояния возбужденных атомов [3], однако в разряде в смеси гелия с аргоном плотность электронов и возбужденных атомов гелия на несколько порядков меньше плотности нейтральных атомов аргона, и вклад этих процессов по сравнению с тушением атомами аргона незначителен.

4. Каскадные радиационные переходы с высокорасположенных уровней.



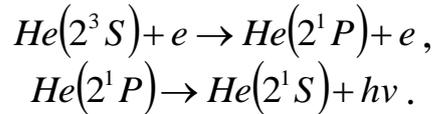
В условиях сильного перемещения заселенностей уровней с $n=3$ и $n=4$ можно ввести средневзвешенные вероятности тушения этих блоков уровней:

$$A_3 = \sum_i A_i P_i / P_{3\Sigma} \quad \text{и} \quad A_4 = \sum_i A_i P_i / P_{4\Sigma},$$

где использовано понятие веса состояния $- P_i = q_i \exp\left[-\frac{E_i}{kT}\right]$ и $P_{\Sigma} = \sum_i P_i$; q_i – статистический вес уровня.

При слабом перемещении этот эффект проявляется в виде некоторой добавки к потоку прямого заселения уровня, причем эта добавка может быть как положительной, так и отрицательной, что соответствует либо разрушению, либо дополнительному заселению уровней при перемешивающихся столкновениях.

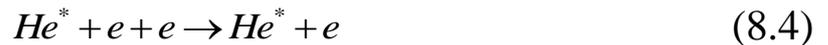
Уровни с $n=2$ также подвержены радиационному разрушению по следующей схеме:



Вероятность последнего процесса $A_{21} = 1.8 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ [1], однако фактор пленения излучения θ при плотности атомов гелия $N_0 \geq 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ($p \geq 10 \text{ Тор}$) имеет величину $\theta = 1/3\sqrt{3k_0R} \sim 10^{-4}$ и эффективная вероятность излучения $A_{21}^* = A_{21}\theta \sim 10^4 \text{ с}^{-1}$.

Механизмы заселения уровней *HeI* с $n=3, 4$

В послесвечении в дополнение к ступенчатому возбуждению с уровней *HeI* с $n=2$ заселение высоковозбужденных состояний происходит в результате рекомбинации атомных, молекулярных и гетеронуклеарных ионов в следующих реакциях:



Молекулярные ионы He_2^+ могут образоваться как в процессах конверсии атомных ионов в молекулярные – $He^+ + 2He \rightarrow He_2^+ + e$, $k_c = 4.7 \times 10^{-31} \text{ см}^3/\text{с}$, так и при ассоциативной ионизации [4] – $He^+ + He \rightarrow He_2^+ + e$, $k_a = (0.3-8.0) \times 10^{-10} \text{ см}^3/\text{с}$.

При давлении газа $p \geq 50 \text{ Тор}$ характерное время конверсии $\tau_c \geq (k_c N_0^2)^{-1} \sim 10^{-6} \text{ с}$, а для ассоциативной ионизации $\tau_a \geq (k_a N_0^2)^{-1} \sim 10^{-8} \div 10^{-9} \text{ с}$.

Времена релаксации в рассматриваемом типе разряда составляют порядка 10^{-7} с , поэтому процессы конверсии атомных ионов в молекулярные не играют существенной роли. Процессы с участием гетероядерных ионов $HeAr^+$ мало изучены, но можно предположить, что из-за малой энергии их диссоциации, их плотность в разряде невелика [5].

В результате реакций (8.4) и (8.5) первоначально электрон захватывается в связанное состояние j . В дальнейшем происходит диффузия захваченного электрона по энергетическим уровням атома в результате столкновений с другими электронами плазмы и

в результате излучения фотонов. Из-за этих процессов первоначально захваченный на высоковозбужденные уровни электрон может оказаться в любом низколежащем энергетическом состоянии, поэтому в спектре излучения такой плазмы будут представлены практически все разрешенные переходы. Коэффициент рекомбинации в процессе реакции (8.4) при высоких плотностях электронов определяется выражением:

$$\alpha_e = 10^{-18} [T_e (K)/300]^{\frac{9}{2}}.$$

Скорость рекомбинации со стабилизацией нейтральной частицей можно оценить по формуле Питаевского [1]. Процесс (8.5) эффективен только при высоких плотностях нейтрального газа. Для коэффициентов рекомбинации в процессах (8.4) и (8.5) характерна сильная зависимость от температуры электронного газа. Для процесса диссоциативной рекомбинации молекулярных ионов с электронами пересечения потенциальных кривых молекулярного иона He_2^+ с отталкивательным термом образующейся возбужденной молекулы происходит только в области колебательно возбужденных уровней иона с квантовыми числами $\mathcal{Q} > 3$. Поэтому диссоциативная рекомбинация He_2^+ из основного состояния становится маловероятной, и этот процесс является пороговым. Первоначально образовавшиеся в плазме ионы He_2^+ находятся в колебательно возбужденном состоянии, и такие частицы эффективно участвуют в процессе диссоциативной рекомбинации. Колебательное возбуждение молекулярного иона снимается при столкновениях с электронами и атомами газа. Особенно быстро происходит колебательная релаксация иона при столкновениях с электронами. Поэтому нельзя однозначно задать эффективный коэффициент диссоциативной рекомбинации He_2^+ . Без знания конкретного вида распределения ионов по колебательным уровням эта величина не имеет смысла. Однако для оценок можно использовать формулу:

$$\alpha_{dr}(T_e) = (0.8 \pm 0.2) \times 10^{-8} \left(\frac{T_e}{10^4} \right)^{-(3 \pm 0.5)}. \quad (8.8)$$

С учетом вышеперечисленных процессов можно написать следующую систему дифференциальных уравнений баланса для плотности электронов n_e , плотности возбужденных атомов гелия

n_1 с $n=2$, плотности возбужденных атомов гелия n_2 с $n=3, 4$ и средней энергии электронов T_e :

$$\frac{dn_e}{dt} = n_0 n_e \beta_{0e} + n_1 n_e \beta_{1e} - \frac{n_e}{\tau_{q\phi}} - n_e^2 n^+ \alpha_e - n_e n_2^+ \alpha_{qp} \quad (8.9)$$

$$\frac{dn_1}{dt} = n_0 n_e \hbar_{12} - n_1 n_e \hbar_{cm} + n_2 A_{21} - n_1 n_A \hbar_T \quad (8.10)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = n_1 n_e \hbar_{cm} - n_2 A_{21} \theta - n_2 n_e \beta_{2e} + n_e^2 n^+ \alpha_e + n_e n_2^+ \alpha_{qp} - n_2 n_A \hbar_T \quad (8.11)$$

$$\frac{dT_e}{dt} = -2 \frac{m_e}{M} (v_{em} + v_{ei}) (T_e(t) - T_q) - H(t) \quad (8.12)$$

Здесь n^+ и n_2^+ – концентрации атомных и молекулярных ионов гелия. В последнем уравнении вид функции $H(t)$ определяется величиной энергии электронов. В диапазоне энергий быстрых электронов от начальной ε_0 до порога неупругих процессов ε_{II} , потери энергии обусловлены объемной релаксацией, поэтому можно принять

$$H(t) = 2\nu_H \Delta E / 3,$$

где ν_H – частота неупругих электрон-атомных столкновений, ΔE – энергия, теряемая быстрым электроном в одном неупругом столкновении.

При энергиях электронов, меньших ε_{II} , доминирующим становится механизм диффузионного остывания электронов [3]:

$$H(t) = H_{q\phi} = \frac{2}{3} \frac{2T_e}{\tau_{q\phi}}.$$

В послесвечении протекают также процессы с участием метастабильных атомов, в которых образуются быстрые электроны, подогревающие электронный газ. В рассматриваемых условиях их вклад невелик, поэтому в уравнении (8.12) эти процессы не учитываются.

Известно, что если верхний уровень спектрального перехода расположен выше «узкого места», то заселенности этих состояний можно оценить согласно работе [1] как

$$y_k = y_e^2 \Pi_k \text{ или } n_k = n_e^2 / n_{e0}^2 \Pi_k \quad (8.13)$$

где $y_k = n_k / n_{k0}$, $y_e = n_e / n_{e0}$, n_{k0} и n_{e0} – равновесные заселенности и плотность электронов, Π_k – фактор, учитывающий радиационные процессы.

Уравнение (6.13) можно переписать в виде:

$$n_j = n_e^2 \frac{q_2}{q_e q_i} \frac{h^3}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp(E_j/T_e). \quad (8.14)$$

АЛГОРИТМ ПРОГРАММЫ

Алгоритм работы основной части программы представлен в виде десяти нижеследующих блоков:

Блок 1. Задать начальные значения параметров (давление в разрядной трубке, длительность импульса напряжения, радиус трубки, начальное значение напряжения) и постоянные коэффициенты.

Блок 2. Вести вектор начальных значений для функции y : $y := \begin{pmatrix} 10^{14} \cdot 5 \\ 10^{11} \\ 10^{11} \\ 10 \end{pmatrix}$

Блок 3. Рассчитать вклад каждого отдельного процесса влияющего на релаксацию средней энергии электронов и заселенности метастабильных атомов отдельно используя элементы программирования в MathCAD, создать параметрический цикл с переменным параметром n .

Блок 4. Функция $D(t, y)$, представляющая собой систему дифференциальных уравнений первого порядка решается методом Рунге-Кутты, который в MathCAD реализуется с помощью встроенной функции *rkfixed*, зависящей от четырех параметров.

Блок 5. Расчет коэффициента для учета влияния поля:

$$\text{PL} := \left| \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..20000 \\ \text{Конс3}_n \leftarrow \frac{0.9 \cdot 10^{-2} \cdot y_0}{p} \cdot \left[E_1 \cdot \exp \left[\frac{-(x - v_0 \cdot z_{n,0})^2}{(\tau \cdot v_0)^2} \right] + E_1 \cdot \exp \left[\frac{-[(1-x) + v_0 \cdot z_{n,0}]^2}{(\tau \cdot v_0)^2} \right] \right]^2 \\ \text{Конс3} \end{array} \right.$$

Блок 6. Коэффициент диссоциативной рекомбинации:

$$\text{KDR} := \left| \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..20000 \\ \text{Конс2}_n \leftarrow 10^{-11} \cdot (z_{n,1})^2 \cdot (z_{n,4})^{\frac{-3}{2}} \\ \text{Конс2} \end{array} \right.$$

Блок 7. Коэффициент прямого возбуждения:

$$\begin{array}{l}
 \text{KPV} := \left| \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..20000 \\ \\ \text{Konc3}_n \leftarrow z_{n,1} \cdot 10^{10} \cdot p \cdot 3.3 \cdot 8.71 \cdot 0.25 \cdot \frac{\left(\frac{z_{n,4}}{20.5}\right)^{\frac{6}{9}}}{20.5 \cdot \sqrt{z_{n,4}}} \cdot e^{\left(\frac{-20.5}{z_{n,4}}\right)} \\ \\ \text{Konc3} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Блок 8. Коэффициент диффузии

$$\begin{array}{l}
 \text{DF} := \left| \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..20000 \\ \\ \text{Konc2}_n \leftarrow z_{n,1} \cdot \frac{10^6}{p} \cdot (z_{n,4}) \\ \\ \text{Konc2} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Блок 9. Коэффициент ступенчатого возбуждения

$$\begin{array}{l}
 \text{KSV} := \left| \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..20000 \\ \\ \text{Konc3}_n \leftarrow \frac{z_{n,2}}{6 \cdot 10^5} \cdot 8.71 \cdot 0.25 \cdot (z_{n,1}) \cdot \frac{\left(\frac{z_{n,4}}{3}\right)^{\frac{6}{9}}}{3 \cdot \sqrt{z_{n,4}}} \cdot e^{\left(\frac{-3}{z_{n,4}}\right)} \\ \\ \text{Konc3} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Блок 10. Построить зависимость искомой функции от всех четырех параметров графически.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Тщательно изучить описание задачи и уметь написать уравнение баланса плотности частиц и уравнение релаксации электронной температуры с учетом различных механизмов охлаждения электронного газа.
2. Численно моделировать процесс релаксации электронной температуры с учетом упругих, неупругих столкновений и диффузионного остывания электронного газа согласно уравнению (8.12). Для численного интегрирования уравнения (8.12) использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка.
3. Численно моделировать релаксацию заселенностей высоковозбужденных состояний атомов гелия с использованием уравнений (8.9) - (8.11). Выявить условия, при которых релаксация заселенностей возбужденных

состояний атомов вследствие релаксации электронной температуры имеет немонотонный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. - М., 1982.
2. Смирнов Б.М. Ионы и возбужденные атомы в плазме. - М., 1979.
3. Райзер Ю.П. Основы физики газоразрядных процессов. - М.: Наука, 1980.
4. Бэдсел Ч. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоиздат, 1989.
5. Днестровский Ю.Н. , Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
6. Волков Е.А. Численные методы – М.: Наука. 1987. - 248 с.
7. Ашурбеков Н.А., Иминов К.О. и др. Компьютерное моделирование в лазерной физике.- Махачкала, ИПЦ ДГУ 1997.

ПРИЛОЖЕНИЕ: КРАТКИЙ КУРС РАБОТЫ В MathCAD

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1П.

Тема: Вычисление выражений.

Цель работы: Научиться вычислять простые выражения и алгебраические выражения.

Краткие сведения

I. Простые вычисления

Простейшие вычисления можно выполнить, используя знак вывода результатов вычислений «=» (равенство). Достаточно просто ввести с клавиатуры необходимое выражение, используя стандартную математическую запись и нажать на клавишу со знаком «=».

Знак «=», введенный с клавиатуры, заставляет программу вычислить значение выражения, стоящего слева от курсора, и распечатать его значение на экране. При этом курсор изменяет свой вид со знака «=» на знак «_». Если курсор имеет вид «_», то это значит, что курсор находится в поле вычисляемого выражения.

При работе с вычисляемыми выражениями возможно использование математических операторов. В нижеприведенной таблице показаны операторы вычислений.

Оператор	Клавиатура
Сложение	+
Вычитание	-
Умножение	*
Деление	/
Возведение в степень	^
Корень квадратный	\
Факториал	!
Модуль	

Помните! Программа приводит текст, введенный с клавиатуры, к математически верному виду (этажность формул, надстрочные и

подстрочные индексы и т.п.), поэтому знаки, отображаемые на экране, отличаются от введенных с клавиатуры.

Пример 1. Вычислить: $15 - 8/104.5$

- После щелчка в любом месте рабочего документа появляется небольшой крестик. Весь ввод с клавиатуры будет размещаться теперь в рабочем документе, начиная с места расположения крестика. После набора знака «=», MathCAD вычисляет выражение и выводит результат.
- На экране должно получиться: $15 - \frac{8}{104.5} = 14.923$

II. Вычисление алгебраических выражений

MathCAD позволяет также вычислять значения выражений, содержащие переменные. Любые переменные, используемые в этом выражении, должны быть определены заранее. В качестве оператора определения (оператора «присвоить значение») используют символ оператора присваивания – « := ». Для ввода его с клавиатуры используется знак « : ».(Вводится по нажатию комбинации клавиш «SHIFT» и « ; »).

Для определения переменной необходимо ввести с клавиатуры ее имя, знак « : » и присваиваемое значение. После ввода знака « : », MathCAD показывает двоеточие, сопровождаемое символом присваивания «:=».

Пример 2. Найти значение выражения: $\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}} \left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}} + \sqrt{\frac{c^2+cd}{c^2-cd}} \right)$ при

$c := 2$ и $d := \frac{1}{4}$

Решение:

- Определим переменные: $c := 2$ и $d := \frac{1}{4}$
- Вычислим: $\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}} \left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}} + \sqrt{\frac{c^2+cd}{c^2-cd}} \right) = 0.333$

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Вычислить:

$$1) \frac{1.8}{5.4 - 0.6}$$

$$5) 13 - \frac{36}{18 \cdot 14}$$

$$9) \frac{6}{17} \cdot 0.24 + 1.8 \cdot \frac{12}{13}$$

$$2) \frac{85}{120 : 6 - 15}$$

$$6) 6 \frac{5}{18} - \frac{7}{105.3}$$

$$10) 4 - \frac{17}{20} \cdot 0.44$$

$$3) \frac{10 \cdot 40 + 60}{23}$$

$$7) 2.6 \cdot \frac{4}{9} + 32$$

$$4) \frac{2 \cdot 17.5}{132.6 - 98.5}$$

$$8) 3.2 \cdot \frac{7}{15} + 1.34$$

Задание 2. Найти значение выражения.

$$1. \frac{\sqrt{a^2 - b} + \sqrt{c} \sqrt{a - \sqrt{b + \sqrt{c}}} \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b} - 2a + \frac{b}{a} - \frac{c}{ab}}} \text{ при } a=4.8, b=1.2.$$

$$2. \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right) \left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b} \right) \div \left[\left(a + 2b + \frac{b^2}{a} \right) \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right) \right] \text{ при } a=0.75, b=4/3.$$

$$3. \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} \div \frac{a^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a-b} - b\sqrt{b}} \text{ при } a=1.2, b=3/5.$$

$$4. \frac{|2x-3| + 6}{2x-3} \sqrt{\frac{1}{x}(9x^{-1} + 4x - 12)} \text{ при } x=-3.$$

$$5. \left(\frac{1}{x-y} + \frac{3xy}{y^3 - x^3} \right) \div \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{x+y}{2x-2y} \right) \text{ при } x=1, y=0.$$

$$6. \left[\frac{\frac{x^3-1}{x+1} \frac{x}{x^3+1}}{\left((x+1)^2 - x \right) \div \left((x-1)^2 + x \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ при } x=-2.$$

$$7. \left[\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} + 5b^{\frac{1}{2}} \right) - \left(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}} \right) \right] \div \left(2a + 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \right) \text{ при } a=54, b=6.$$

$$8. \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) \div \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \right] \div \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \text{ при } a=1\frac{33}{40}, b=0.625 \text{ и } c=3.2.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2П

Тема. Решение уравнений и их систем.

Цель работы: Научиться решать одно уравнение с одним неизвестным и системы уравнений в MathCAD.

Краткие сведения

I. Решение одного уравнения с одним неизвестным

Для решения одного уравнения с одним неизвестным используется функция **ROOT**. Аргументами этой функции является выражение и переменная, входящая в выражение. Ищется значение переменной, при котором выражение обращается в ноль. Функция возвращает значение переменной, которое обращает выражение в ноль.

Для определения корней уравнения необходимо привести уравнение к виду $f(x)=0$ и использовать функцию поиска корней следующим образом: $root(f(x),x)$, где $f(x)$ – заданное уравнение, x – переменная, относительно которой это уравнение решается. Для поиска корней MathCAD использует приближенные методы вычислений, поэтому перед использованием функции $root$ необходимо задать начальное приближение для переменной, относительно которой решается уравнение.

Пример 1. Найти a – решение уравнение уравнения $e^x = x^3$.

Решение.

- Определим начальное значение переменной x : $x:=3$
- Определим выражение, которое должно быть обращено в ноль. Для этого перепишем уравнение $e^x = x^3$ в виде $e^x - x^3 = 0$
- Левая часть этого выражения является вторым аргументом функции **ROOT**
- Определим переменную a, как корень уравнения:
 $a := root(x^3 - e^x, x)$
- Найдем значение корня: $a = 1.857$

Помните! Начальное значение переменной должно быть присвоено до начала использования функции root.

II. Решение системы уравнений

Для решения нескольких уравнений совместно MathCAD представляет блок решений. Блок решений состоит из ключевого слова **Given**, группы уравнений и заканчивается функцией **Find**.

Для решения системы уравнений необходимо сделать следующее:

Задать начальные приближения для всех неизвестных, входящих в систему уравнений. MathCAD решает уравнения при помощи итерационных методов. На основе начального приближения строится последовательность, сходящаяся к искомому решению.

Напечатать ключевое слово Given. Оно указывает MathCAD, что далее следует система уравнений.

Ввести уравнения и неравенства в любом порядке ниже ключевого слова Given. Удостоверьтесь, что между левыми и правыми частями уравнений стоит символ «= \Rightarrow ». Используйте $\langle \text{ctrl} \rangle =$ для печати символа =. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов: $\langle, \rangle, \leq, \geq$.

Ввести любое выражение, которое включает функцию Find. Эта функция возвращает решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Пример 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Решение.

- Определим начальные значения для всех переменных: $x := 1$ и $y := 1$
- Введем систему уравнений после ключевого слова Given:
Given $x^2 + y^2 = 16$ и $x + y = 4$
- Зададим ограничения для переменных в виде неравенств: $x \leq 1$, $y > 2$ и $y = 1$
- Введем выражение, которое включает функцию Find:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y)$$

– Найдем решение системы: $x = -1.646$

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Решить уравнение.

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| 1. $x = \cos(x)$ | 6. $e^x = x^2 + 5$ |
| 2. $x^3 + \sin x = 25$ | 7. $x = \sin^2 x + 7$ |
| 3. $x^2 - 2x + 1.5 = 0$ | 8. $x = \operatorname{tg}x + 1$ |
| 4. $x^2 - \cos x = 27$ | 9. $x^2 + 3x + 9 = 0$ |
| 5. $e^x + 1 = x^3$ | 10. $x^5 + \cos x = 32$ |

Задание 2. Решить систему уравнений.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ | 5. $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 2 \end{cases}$ | 9. $\begin{cases} \frac{1}{5}x + y = 7.6 \\ \frac{1}{7}x - y = 4 \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 0.4x - y = -5 \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 84 \end{cases}$ | 10. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + y = -4 \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$ | 7. $\begin{cases} \frac{1}{4}x + y = -5 \\ 7x - y = 3.5 \end{cases}$ | |
| 4. $\begin{cases} 21x - y = -4 \\ 17x + y = -7 \end{cases}$ | 8. $\begin{cases} 6x + y = -0.2 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$ | |

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3П.

Тема. Дифференцирование функции. Геометрический смысл производной.

Цель работы: Научиться находить численное значение производной функции в заданной точке.

Краткие сведения

I. Вычисление производной функции

Оператор производной MathCAD предназначен для нахождения численного значения производной функции в заданной точке. Для вычисления производной используется клавиша со знаком $\frac{d}{d}$.

Для того, чтобы найти производную функции и вычислить ее численное значение, необходимо сделать следующее:

- Сначала определить точку, в которой необходимо найти производную.
- Щелкнуть ниже определения этой точки. Затем набрать $\frac{d}{d}$. Появится оператор производной с двумя полями: $\frac{d}{d}$
- Щелкнуть на поле в знаменателе и набрать имя переменной, по которой проводится дифференцирование.
- Щелкнуть на поле справа от $\frac{d}{dx}$ и набрать выражение, которое нужно дифференцировать.
- Чтобы увидеть результат, нажать знак =.

Пример 1. Найти производную x^3 по x в точке $x=2$

Решение:

- Определим точку, в которой необходимо найти производную:
 $x:=2$
- Введем оператор производной, заполним поля и вычислим производную: $\frac{d}{dx}x^3=12$

Помните! Результат дифференцирования есть не функция, а число – значение производной в указанной точке переменной дифференцирования.

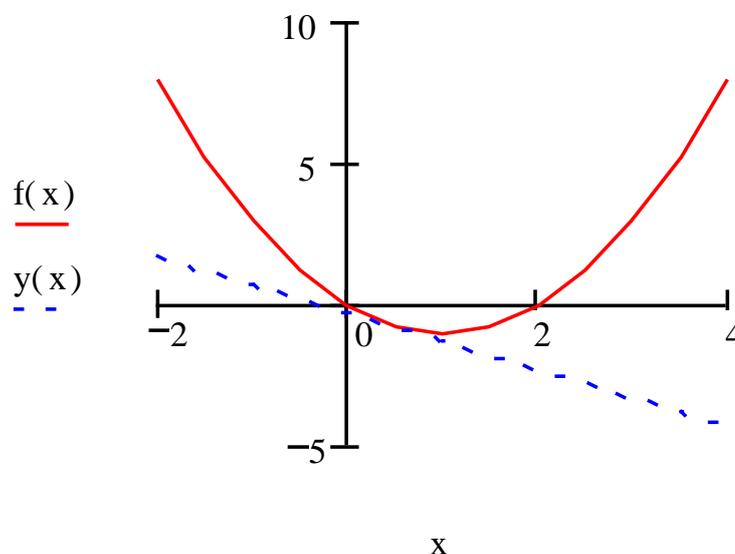
- Хотя дифференцирование возвращает только одно число, можно определить одну функцию как производную другой функции. Например: $f(x) := \frac{d}{dx} g(x)$.
- Вычисление $f(x)$ будет возвращать в численной форме производную $g(x)$ в точке x .
- Выражение, которое нужно дифференцировать, может быть вещественным или комплексным.
- Переменная дифференцирования должна быть простой неиндексированной переменной.

II. Геометрический смысл производной

Пример 2. Дана функция $y = f(x)$. Построить график функции и касательную к графику в точке с абсциссой $x = x_0$, если $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = 0.5$, $y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ – уравнение касательной.

Решение:

- Введем данную функцию и найдем ее значение в точке x_0 :
 $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = 0.5$, $f(x_0) = -0.75$
- Найдем значение производной данной функции в точке x_0 :
 $F(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ и $F(x) = -1$
- Запишем уравнение касательной для данной функции:
 $y = F(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Построим график данной функции и касательную к ней.



Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Найти производную функции в произвольной точке.

1. $y = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$

5. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$

9. $y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$

2. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

6. $y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}$

10. $e^x \sin x \cos^3 x$

3. $y = x \operatorname{lg} x$

7. $y = \cos 2x \operatorname{lg} x$

4. $y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

8. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}$

Задание 2.

Дана функция $y = f(x)$. Построить график функции и касательную к графику в точке с абсциссой $x = x_0$.
 $y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ – уравнение касательной.

1. $f(x) = \frac{1}{x^4} + 2, x_0 = 1$

6. $f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(4x - \frac{\pi}{3} \right), x_0 = \pi/6$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x_0 = 2$

7. $f(x) = x^2 - 2x - 8, x_0 = -1$

3. $f(x) = x \ln x, x_0 = e$

8. $f(x) = \cos x, x_0 = -\pi/2$

4. $f(x) = x^2 + 1, x_0 = -1$

9. $f(x) = x^2 - 3x + 2, x_0 = 3$

5. $f(x) = -x^2 + 1, x_0 = 1$

10. $f(x) = e^{2x+3}, x_0 = -2$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4П.

Тема. Интегральное исчисление.

Цель работы: Научиться находить определенные интегралы функций, вычислять площадь фигуры при помощи интеграла.

Краткие сведения

I. Определенный интеграл

Оператор интегрирования в MathCAD предназначен для численного вычисления определенного интеграла функции по некоторому интервалу.

Знак интеграла выводится при нажатии клавиши со знаком **&**.

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл, необходимо сделать следующее:

- Щелкнуть в свободном месте и набрать знак **&**. Появится знак интеграла с пустыми полями для подынтегрального выражения, пределов интегрирования и переменной интегрирования: \int
- Щелкнуть на поле внизу и набрать нижний предел интегрирования. Щелкнуть на верхнем поле и набрать верхний предел интегрирования.
- Щелкнуть на поле между знаком интеграла и d и набрать выражение, которое нужно интегрировать.
- Щелкнуть на последнее пустое поле и набрать переменную интегрирования.
- Чтобы увидеть результат, нажать знак **=**.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\sin(x)^2$ от 0 до $\pi/4$

Решение:

- Введем знак интеграла и заполним пустые поля;

- Вычислим интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)^2 dx = 0.143$

Помните!

- Пределы интегрирования должны быть вещественными.

- Выражение, которое нужно интегрировать может быть вещественным, либо комплексным.
- Кроме переменной интегрирования, все переменные в подынтегральном выражении должны быть определены ранее в другом месте рабочего документа.
- Переменная интегрирования должна быть простой переменной без индекса.
- Если переменная интегрирования является размерной величиной, верхний и нижний пределы интегрирования должны иметь ту же самую размерность.

II. Площадь фигуры

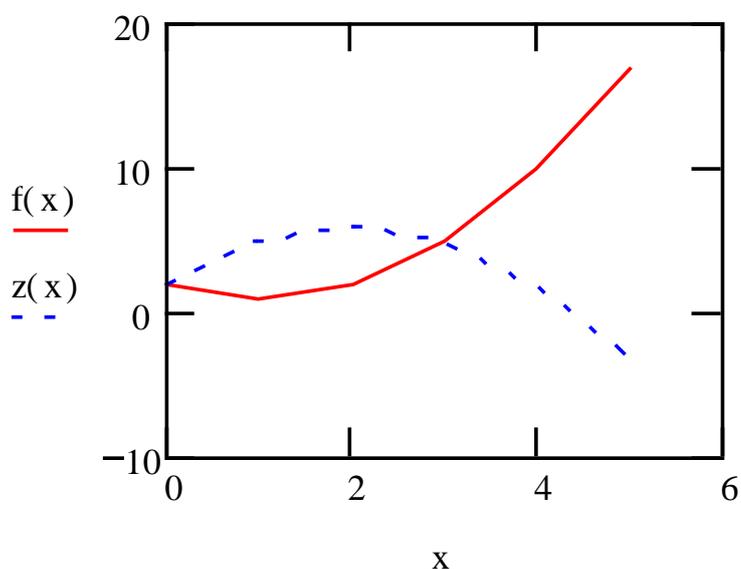
Как известно, при помощи определенного интеграла можно вычислять площадь фигуры.

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = 2 + 4x - x^2$

Решение.

- Построим графики этих функций в одном графическом блоке:
 $x = 0.5$, $y = x^2 - 2x + 2$ и $z = 2 + 4x - x^2$
- Вычислим площадь полученной фигуры:

$$\int_0^3 2 + 4x - x^2 dx - \int_0^3 x^2 - 2x + 2 dx = 9 \text{ (кв. ед.)}$$



Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Вычислить определенный интеграл.

$$1. \int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \qquad 5. \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}} \qquad 9. \int_1^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2-1} dx$$

$$2. \int_4^9 \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \qquad 6. \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx \qquad 10. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$3. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx \qquad 7. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$4. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2+x+1} \qquad 8. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Задание 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.
Построить эту фигуру.

$$1. y = x^2 - 2x + 2, y = 2 + 4x - x^2$$

$$6. y = x^2, y = \frac{x^2}{x-2}, y = 0, x = 4$$

$$2. y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = 2\pi$$

$$7. y = \sqrt{x}, y = \sqrt{4-3x}, y = 0$$

$$3. y = x^3, y = x^{\frac{1}{3}}, x = 0, x = 1$$

$$8. y = -x^2, y = 2e^x, x = 0, x = 1$$

$$4. y = \operatorname{tg} x, y = \frac{2}{3} \cos, x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right), x = 0$$

$$9. y = x - 2, y = x^2 - 4x + 2$$

$$5. y = 6x^2 - 5x + 1, y = \cos \pi x, x = 0, x = 1$$

$$10. y = \sin x, y = 2 \sin x, x = \frac{5\pi}{4}, x = 0$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5П.

Тема. Построение графиков функций.

Цель работы: Познакомиться с основными действиями при создании графика в MathCAD. Научиться строить декартов график, графики поверхности, полярные графики.

Краткие сведения

I. Основные действия при создании графика

Чтобы создать график, необходимо проверить следующие операции:

- Предварительно определить аргумент и функцию аргумента, для которой будет строиться график. Аргумент задается диапазоной переменной, а функция аргумента – функцией пользователя. Например: $x := 0 \dots \pi$ и $y(x) = \sin(x)$
- Щелкнуть мышью там, где нужно создать график.
- Выбрать **Декартов график** из меню **Графика**. При этом на экране появится «заготовка» графика с шестью полями ввода, по три на каждой оси.

Чтобы увидеть график, необходимо заполнить пустые поля:

- Пустое поле в середине горизонтальной оси предназначено для независимой переменной графика. Нужно ввести в это пустое поле дискретную переменную, переменную с индексом или любое выражение, содержащее дискретную переменную.
- Пустое поле в середине вертикальной оси содержит выражение, график которого нужно построить. Нужно ввести в это пустое поле дискретную переменную или любое выражение, содержащее дискретную переменную, находящуюся на горизонтальной оси.
- Другие 4 пустые поля могут использоваться, чтобы отменить автоматический выбор границ на осях координат в MathCAD.
- Нажать <Enter>. В указанном прямоугольнике появляется график функции.

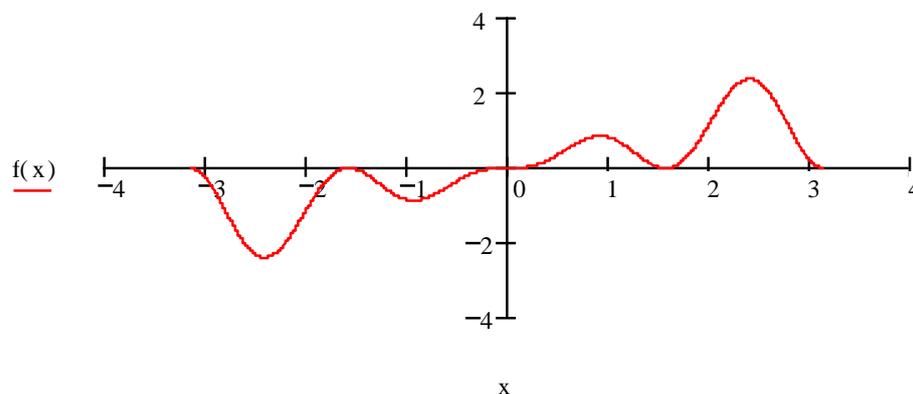
Для того чтобы вывести функцию на график необходимо сделать следующее:

- Напечатать выражение, график которого нужно получить, в среднее поле на оси ординат и напечатать x в среднем поле на оси абсцисс.
- Можно также определить функцию $f(x)$ и поместить ее в среднее пустое поле оси ординат. Это особенно полезно для функций, представляемых громоздким выражением.

Пример 1. Построить график функции $f(x) = x \sin(2x)^2$

Решение:

- Определим аргумент и функцию аргумента, для которой будет строиться график: $x := -\pi, -3.14, \dots, \pi$ и $f(x) = x \sin(2x)^2$
- Построим график этой функции.



II. Размещение нескольких графиков на чертеже

Можно построить несколько кривых на одном и том же чертеже – для этого достаточно определить их и перечислить в виде списка в шаблоне графика.

График может содержать несколько выражений по оси ординат в зависимости от одного выражения по оси абсцисс, согласованных с соответствующими выражениями по оси абсцисс.

Например, чтобы представить графически несколько выражений по оси ординат относительно одного выражения по оси абсцисс, необходимо:

- Вести первое выражение для оси ординат, сопровождаемое запятой. Непосредственно под первым выражением появится пустое поле.
- Ввести в это пустое поле второе выражение, сопровождаемое другой запятой, чтобы получить другое пустое поле и т.д.

Помните! Все выражения должны использовать одну и ту же дискретную переменную.

Можно построить несколько независимых кривых на одном чертеже. Для этого необходимо:

- Ввести два или более выражения, отделяемых запятыми на оси абсцисс, и то же самое число выражений на оси ординат. MathCAD согласует выражения попарно – первое выражение оси абсцисс с первым выражением оси ординат, второе со вторым и т.д. Затем рисуется график каждой пары.

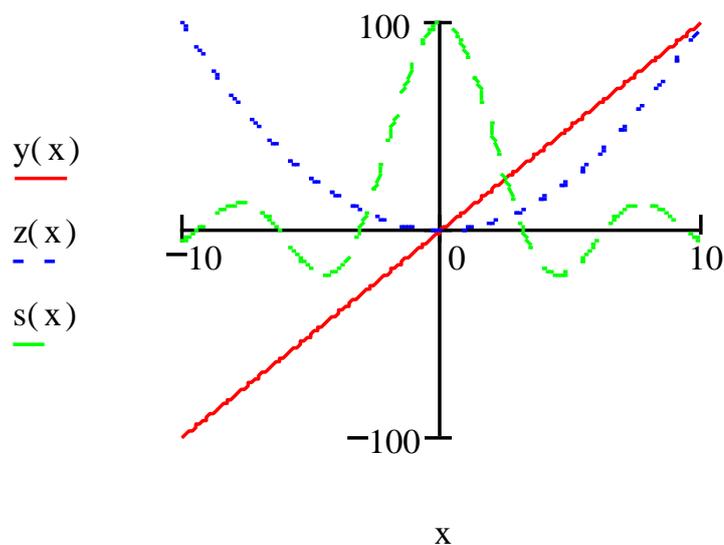
Помните! Каждая согласованная пара выражений должна использовать одну дискретную переменную. Дискретная переменная для одной согласованной пары не должна быть дискретной переменной для других пар.

Пример 2. Построить графики трех функций, зависящих от одной переменной x , в пределах одного графического блока:

$$y(x)=10x, z(x)=x^2, s(x)=100 \frac{\sin(x)}{x}$$

Решение.

- Определим аргумент и функции аргумента, для которых будут строиться графики: $x := -10, -9.9, \dots, 10$, $y(x)=10x$, $z(x)=x^2$ и $s(x)=100 \frac{\sin(x)}{x}$
- Построим графики данных функций.



III. Построение графиков поверхностей

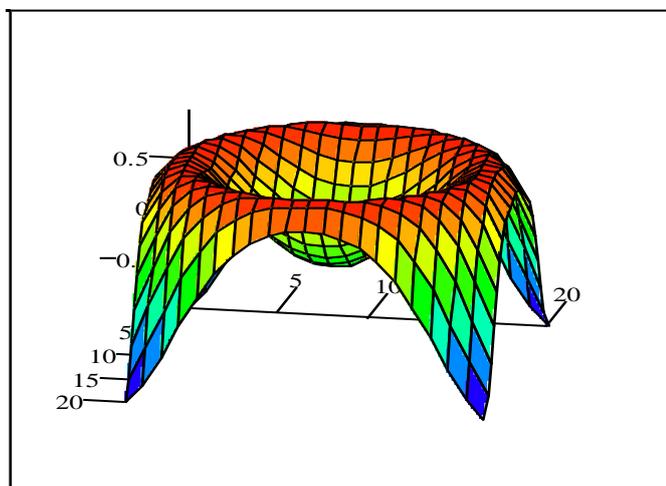
Трехмерные графики в MathCAD отображают графически матрицы значений.

Чтобы создать график поверхности, необходимо:

- Определить матрицу значений, которую необходимо отобразить графически. MathCAD будет использовать номер строки и столбца матрицы в качестве координат по осям X и Y . Элементы матрицы будут представлены на графике как высоты выше или ниже плоскости X - Y .
- Выбрать **График поверхности** из меню **Графика**. MathCAD покажет рамку с одним полем ввода.
- Напечатать имя матрицы в этом поле. Затем нажать клавишу [F9] или, в автоматическом режиме, щелкнуть мышью вне выделенной графической области.

Пример 3. Построить график поверхности $f(x, y) = \sin(x + y)$

- Определим функцию двух переменных: $f(x, y) = \sin(x + y)$.
- Допустим, что по осям X и Y необходимо 20 точек. Определим дискретные аргументы i и j , чтобы индексировать эти точки:
 $N := 20, i := 0..N, j := 0..N$
- Определим x и y как равномерно располагаемые точки на осях X и Y : $x_i := -1.5 + 0.15i$ и $y_j := -1.5 + 0.15j$
- Заполним матрицу M значениями $f(x, y)$: $M_{i, j} = f(x_i, y_j)$
- Выберем **График поверхности** из меню **Графика**. Напечатаем M в поле ввода и щелкнем вне графической области.



М

IV. Построение полярного графика

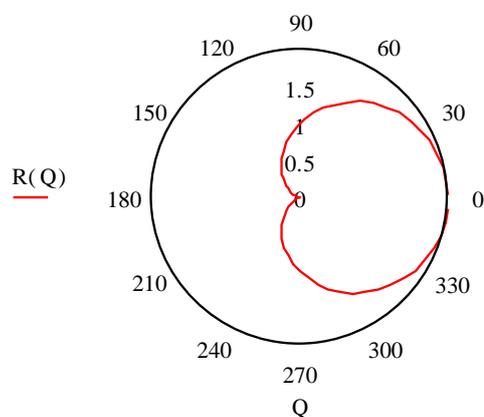
Для отображения функций, которые неудобно воспроизводить в декартовых координатах, можно строить полярные графики.

Чтобы создать график в полярных координатах, необходимо:

- Выбрать **Полярный график** из меню **Графика**. MathCAD показывает круг с четырьмя полями ввода.
- Выше области графика определить угол Q и функцию угла $R(Q)$.
- Поле ввода внизу предназначено для угловой переменной графика. Ввести туда дискретную переменную или любое выражение, включающее дискретную переменную.
- Поле ввода слева должно содержать выражение для радиуса.
- Два поля ввода справа предназначены для верхнего и нижнего граничных значений радиуса. MathCAD заполняет эти поля по умолчанию.
- В MathCAD полярные графики рисуются путем замены R и Q на декартовы координаты x и y с использованием стандартных преобразований $x = R \cos(Q)$ и $y = R \sin(Q)$. Предполагается, что R и Q могут принимать и положительные, и отрицательные значения.

Пример 4. Построить график функции $R(Q) = \cos(Q) + 1$

- Определим приращение для Q : $N := 50$
- Определим Q как дискретный аргумент с заданным приращением: $Q := 0.2 \frac{\pi}{N}, 0.2 \frac{\pi}{N} + 0.1 \dots 2\pi$
- Определим $R(Q)$ как функцию Q : $R(Q) = \cos(Q) + 1$
- Отобразим график $R(Q)$ в полярных координатах.



Помните! MathCAD не обрабатывает график, пока вы не нажмете [F9], или, в автоматическом режиме, не щелкните мышью вне области графика.

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Построить график функции.

- | | | |
|------------------------|------------------------------|--------------------------|
| 1. $y = x^2 + \sin x$ | 5. $y = \sqrt{4-3x}$ | 9. $y = 4x - x^2$ |
| 2. $y = 2x^2 + 13$ | 6. $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ | 10. $y = \cos \pi x + 1$ |
| 3. $y = x^2 \cos 2x$ | 7. $y = -e^x - 1$ | |
| 4. $y = 7x - x^2 - 10$ | 8. $y = \frac{x^2}{x-2}$ | |

Задание 2. Построить графики двух функций, зависящих от одной переменной.

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1. $y = \ln(x+6), y = 3\ln x$ | 6. $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{4-3x}$ |
| 2. $y = 6x^2 - 5x + 1, y = \cos \pi x$ | 7. $y = 4x - x^2, y = x^2 - 4x + 2$ |
| 3. $y = x - 2, y = x^2 - 2x$ | 8. $y = 21x + 4, y = 2\sin x$ |
| 4. $y = \cos \frac{1}{x}, y = x^2 - 2x$ | 9. $y = x^3, y = \frac{\sin x}{x}$ |
| 5. $y = x^2 + 1, y = 2\cos x$ | 10. $y = x^2 - 6, y = -e^x$ |

Задание 3. Построить график поверхности.

- | | | |
|--|--|---------------------------------------|
| 1. $f(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ | 5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ | 9. $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ |
| 2. $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ | 6. $f(x, y) = x\sqrt{y}$ | 10. $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ |
| 3. $f(x, y) = x^2 y + x$ | 7. $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ | |
| 4. $f(x, y) = y^2 - x^2$ | 8. $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ | |

Задание 4. Построить график в полярных координатах.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\rho = 2 \sin \varphi$ | 5. $\rho = 2(\cos \varphi - \sin \varphi)$ | 9. $\rho = 2 - \sin 4\varphi$ |
| 2. $\rho = \frac{\pi}{\varphi}$ | 6. $\rho = \frac{15}{3 - 4 \sin \varphi}$ | 10. $\rho = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ |
| 3. $\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^\varphi$ | 7. $\rho = 4 \sin 2\varphi$ | |
| 4. $\rho = 3 \sin 3\varphi$ | 8. $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ | |

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6П.

Тема. Программирование в MathCAD.

Цель работы: Познакомиться с возможностями программирования, научиться создавать программы и решать задачи при помощи программ.

Краткие сведения

I. Создание программ

Для решения тех проблем, которые не могут быть реализованы стандартными средствами, в системе MathCAD предусмотрена возможность написания небольших программ. Программы в MathCAD являются частным случаем выражений пакета MathCAD.

Для написания программ используется программная палитра, которая вызывается кнопкой панели управления. Имеется 10 операторов, из которых строится программа.

Создание программы начинается с кнопки **AddLine**. Появится вертикальная линия, которая играет роль операторных скобок. Справа от вертикальной линии находятся поля ввода для занесения операторов. Операторы вводятся соответствующей кнопкой на программной палитре. Поля ввода для дополнительных операторов открываются с помощью щелчка по кнопке «AddLine». Чтобы исключить лишнее поле ввода, его нужно выделить и нажать клавишу .

Вместо оператора присваивания :=, в программах пользуются оператором локального присваивания ←. В качестве результата работы MathCAD возвращает значение. Этим значением является значение последнего выражения, выполненного программой.

Пример 1. Найти один из корней квадратного уравнения $3x^2 + x - 2 = 0$
Решение.

- Определим коэффициенты и свободный член уравнения: $a := 3$,
 $b := 1$ и $c := -2$
- Найдем один из корней уравнения:

$$q(a, b, c) := \begin{cases} \text{disc} \leftarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ x1 \leftarrow -b + \sqrt{\text{disc}} \\ x2 \leftarrow 2 \cdot a \\ \frac{x1}{x2} \end{cases}$$

$$q(a, b, c) = 0.667$$

II. Условные операторы

Могут встретиться случаи, в которых какой-нибудь оператор нужно выполнить только в случае выполнения некоего условия. Этого можно добиться с помощью условного оператора «**if**».

После нажатия на клавишу «if» появится два поля ввода. Правое поле ввода предназначено для выражения, которое должно выполняться. Левое поле ввода предназначено для значения, которое будет иметь выражение, если логическое выражение в правом поле истинно.

III. Циклы

При программировании появляется возможность многократного выполнения некоторой последовательности операторов в цикле. MathCAD предлагает 2 вида циклов, отличающихся по способу определения условия завершения цикла: «**for**» или «**while**».

Цикл «while».

Цикл данного типа используют, если цикл должен завершиться по выполнении некоего условия, причем момент выполнения этого условия заранее не известен.

Чтобы записать цикл типа «while», нужно:

- Щелкнуть по кнопке «while» в панели программирования.
- Напечатать условие выполнения в верхнем поле ввода. Обычно это – логическое выражение.
- Записать в оставшемся поле ввода выражение, подлежащее повторяющемуся вычислению.
- Обнаружив заголовок цикла типа «while», MathCAD проверяет условие цикла. Если оно истинно, то MathCAD

выполняет тело цикла и снова проверяет условие. Если оно ложно, то MathCAD заканчивает выполнение цикла.

Циклы «for».

Цикл данного типа используют, если заранее точно известно необходимое число выполнений цикла. Число выполнений определяется переменной цикла, задаваемой в его начале.

Для создания цикла типа «for», необходимо:

- Щелкнуть по кнопке «for» на панели программирования.
- Напечатать в поле ввода слева от знака \in имя переменной цикла.
- Ввести в поле справа от знака \in диапазон значений, в котором должна изменяться переменная цикла. Форма задания диапазона в точности такая же, как и для дискретного аргумента.
- В оставшееся поле ввода впечатать выражение, подлежащее повторяющимся вычислениям. Обычно оно включает в себя переменную цикла.

Пример 2.

Дан ребус. Каждой букве соответствует определенная цифра. Восстановить пример.

```

B :=
  n ← 0
  U ← 9
  P ← 1
  E ← 0
  for A ∈ 2..8
    R ← 10 - A
    for C ∈ 2..8
      for S ∈ 2..8
        if P·10000 + E·1000 + A·100 + C·10 + E·1 = A·1 + S·10 + U·100 + U·1000 + S·100 + S·10 + R·1
          M<n> ←
            [
              U
              S
              A
              U
              S
              S
              S
              R
              P
              E
              A
              C
              E
            ]
          n ← n + 1
  for K ∈ 0..3
    (N<K> ← M<K>) if M1,K ≠ M2,K
N

```

B =

	0
0	9
1	3
2	2
3	9
4	3
5	3
6	8
7	1
8	0
9	2
10	7
11	0

Задачи для самостоятельного выполнения

1. В одном районе расположены четыре населенных пункта. По территории района проходит железная дорога. По просьбе жителей района планируется построить железнодорожную станцию и проложить дороги от нее до населенного пункта. Требуется определить наиболее удобное расположение железнодорожной станции. (Место для станции надо выбрать так, чтобы наибольшее из расстояний от нее до населенных пунктов было как можно меньше).
2. Две моторные лодки равномерно двигались по реке в направлении к озеру, в которое река впадает. Поравнявшись, они начали двигаться равноускоренно. Какая из лодок раньше дойдет до озера?
3. На заданном расстоянии от пушки находится стена. Известны угол наклона пушки и начальная скорость снаряда. Попадет ли снаряд в стену?
4. На узкой улице внезапно заклинило тормоза у «Волги». В результате немедленно образовалась «пробка». Шофер стоящего сзади грузовика, у которого лопнуло терпение, предложил помочь убрать «Волгу» с проезжей части дороги, оттащив ее на обочину с помощью троса. Удастся ли оттащить «Волгу»?
5. Расположенный на берегу реки металлургический завод осуществил сброс сточных вод, в результате чего концентрация вредных веществ в реке резко увеличилась. С течением времени эта концентрация, естественно, уменьшается. Требуется сообщить, каков будет уровень загрязнения реки через сутки, двое суток и т.д. до тех пор, пока концентрация не станет меньше предельно допустимой.
6. Органами милиции задержан грузовик с помидорами, похищенными на овощной базе. В городе всего четыре овощные базы, каждая из них получает помидоры из своего сельскохозяйственного района. Определить, с какой базы были вывезены помидоры. Расследование осложняется тем, что помидоры на всех базах одного сорта.
7. Бетон, производимый на заводах А и В, нужно развозить по трем стройплощадкам: С1, С2 и С3. Известны потребности

стройплощадок в бетоне, запасы бетона на каждом заводе и затраты на перевозку 1 т бетона от каждого завода до каждой стройплощадки. Требуется составить такой план перевозок, который обеспечивал бы наименьшие затраты.

8. Для полива трех полей колхоз использует насосную станцию. На первое поле требуется подать не менее 200 кубометров воды в сутки, на второе – не менее 300, на третье не менее 350. В распоряжении колхоза 1200 кубометров воды в сутки. Стоимость подачи q кубометров воды на первое поле $1570q$ р., на второе поле $1720q$ р., на третье $1930q$ р. Сколько кубометров воды надо подать на каждое поле, чтобы затраты были наименьшими?
9. Для производства вакцины на заводе планируется выращивать культуру бактерий. Известно, что если масса бактерий – x г., то через день она увеличится на $(a-bx)x$ г., где коэффициенты a и b зависят от вида бактерий. Как изменяется масса бактерий через 1, 2, 3, ..., 365 дней (до конца года)?
10. На острове живут зайцы и волки. Экологи установили такую закономерность: если в начале года количество зайцев равно x , а количество волков – y , то через год число зайцев будет равно $x+(4-0.001y-0.0001x)x$, а число волков будет равно $y+(-0.03+0.003x)y$. Сколько зайцев и волков будет на острове через год, два, три и т.д.? При каких начальных значениях x и y на острове исчезнут волки и зайцы?